

SY01 - Éléments de probabilités

Chapitre 3 - Variables aléatoires continues

Équipe de mathématiques appliquées

UTC

Automne 2010



Chapitre III

Variables aléatoires continues

III.1	Variable aléatoire continue, loi de probabilité	3
III.2	Caractéristiques des lois	8
III.3	Lois usuelles	19
III.4	Fonction génératrice des moments	26
III.5	Somme de deux variables aléatoires, inégalités	29

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1 Variable aléatoire continue, loi de probabilité

III.1.1	Introduction	4
III.1.2	Variables aléatoires réelles	5
III.1.3	Loi de probabilité	6

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.1 Introduction

Lorsque les valeurs susceptibles d'être prises par une variable aléatoire forment un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de \mathbb{R} , on dit que la variable est continue, ou que le modèle est continu.

Du point de vue mathématique, il y a donc une différence essentielle avec les modèles discrets (finis ou infinis). Cette différence se manifeste par le fait que pour une v.a. discrète, la probabilité totale (égale à un) se répartit en des points bien précis, alors que pour une v.a. continue il ne peut y avoir de probabilité non nulle en un point.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.2 Variables aléatoires réelles

Exercices :

[Exercice A.1.1](#)

On appelle tribu des boréliens de \mathbb{R} , notée \mathcal{B} , la tribu engendrée par les ensembles ouverts de \mathbb{R} . Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire.

Définition III.1.1. *On appelle variable aléatoire réelle (v.a.r.) définie sur (Ω, \mathcal{F}, P) toute application X de Ω dans \mathbb{R} qui vérifie :*

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Proposition III.1.1 (non démontrée). *Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire et X une application de Ω dans \mathbb{R} . Si*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{F}$$

alors X est une v.a.r.

Remarque III.1.1. *Les variable aléatoires discrètes vues au chapitre 2 répondent à cette définition ; elles ne sont en fait qu'un cas particulier des variables aléatoires réelles.*

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

III.1.3 Loi de probabilité

Exercices :

[Exercice A.1.2](#)

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et X une v.a.r. définie sur Ω .

Théorème III.1.1. *L'application p_X définie sur \mathcal{B} par :*

$$p_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in B\}), \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

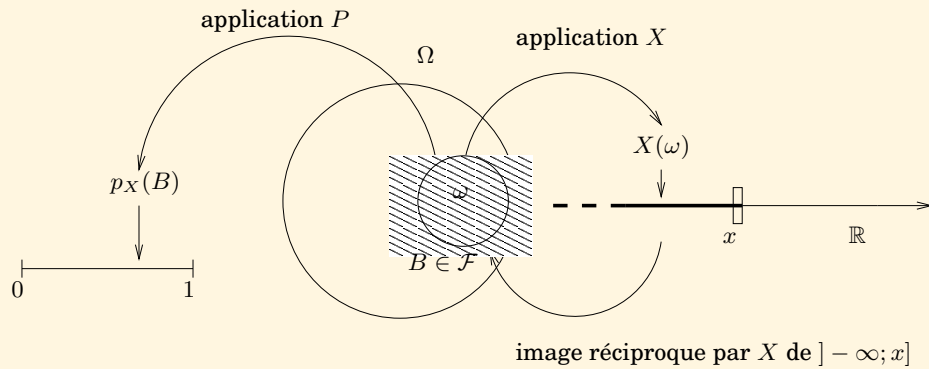
est une mesure de probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Cette application est appelée mesure de probabilité image de X ou loi de probabilité de la v.a.r. X .

Démonstration. Voir document [C.1.1](#).

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Loi de probabilité



Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.2 Caractéristiques des lois

III.2.1	Fonction de répartition	9
III.2.2	Densité	11
III.2.3	Espérance	13
III.2.4	Indépendance	15
III.2.5	Moments, médiane	17

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

III.2.1 Fonction de répartition

Exercices :

[Exercice A.1.3](#)

Exemples :

[Exemple B.1](#)

[Exemple B.3](#)

Définition III.2.1. L'application F_X définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans $[0, 1]$, par :

$$F_X(x) = p_X([-\infty, x]), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

est appelée fonction de répartition (f.d.r.) de la variable aléatoire X .

Théorème III.2.1. La fonction de répartition d'une v.a.r. X est croissante, nulle en $-\infty$, égale à 1 en $+\infty$ et est continue à droite en chacun de ses points de discontinuité.

Définition III.2.2. Une v.a. est dite continue si sa f.d.r. est continue.

Proposition III.2.1. Le saut de F_X en un point x_0 , c'est-à-dire la quantité $F(x_0) - F(x_0-) = F(x_0) - \lim_{x \nearrow x_0} F(x)$, est la probabilité que X prenne la valeur x_0 que l'on note $p_X(\{x_0\})$ ou $P(X = x_0)$ cette probabilité est nulle lorsque la variable aléatoire est continue.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Démonstration. Voir document [C.1.2](#)

Remarque III.2.1. Dans la suite de ce cours nous noterons $P(a < X < b)$ au lieu de $P(\{\omega \in \Omega; a < X(\omega) < b\})$.

Théorème III.2.2 (non démontré). Soit F une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $[0, 1]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) F est croissante ;
- (ii) $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$;
- (iii) F est continue à droite en chacun de ses points de discontinuité.

Alors il existe une v.a.r. admettant F pour f.d.r.

Remarque III.2.2. Ce dernier théorème montre qu'une v.a.r. X peut être décrite seulement par sa f.d.r. Bien souvent, l'espace fondamental sous-jacent (Ω, \mathcal{F}, P) n'interviendra pas, seule comptera la loi de probabilité p_X de X , ou, plus simplement, sa f.d.r. F_X .

Proposition III.2.2. Soit X une v.a.r. de f.d.r. F , et a et b ($a < b$) des points de continuité de F alors :

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b).$$

Remarque III.2.3. D'une manière générale pour une v.a.r. X de f.d.r. F et pour $a < b$ on a :

$$F(b) - F(a) = P(X \in] - \infty, b]) - P(X \in] - \infty, a]) = P(a < X \leq b).$$

III.2.2 Densité

Exercices :

[Exercice A.1.4](#)

[Exercice A.1.5](#)

Définition III.2.3. On dit d'une v.a.r. X qu'elle est absolument continue (ou à densité) s'il existe une fonction f_X positive satisfaisant

$$p_X(B) = \int_B f_X(x) dx$$

pour tout élément $B \in \mathcal{B}$. Cette fonction f_X , lorsqu'elle existe, est appelée densité de probabilité de X .

Proposition III.2.3. Toute densité de probabilité f satisfait les propriétés suivantes :

a- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0;$

b- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$

Réciproquement, si f satisfait les propriétés a et b ci-dessus, alors il existe une v.a.r. admettant f pour densité.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Remarque III.2.4. *Bien sûr, lorsque $B =] - \infty, x]$, nous obtenons :*

$$P(X \in] - \infty, x]) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy.$$

Si x est un point de continuité de f_X alors on a :

$$F'_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) = f_X(x).$$

Remarque III.2.5. *Une densité peut prendre des valeurs supérieures à 1 !*

Densité

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.2.3 Espérance

Exercices :

[Exercice A.1.6](#)

Définition III.2.4. Soit X une v.a.r. absolument continue de densité f_X . Si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx < +\infty,$$

alors X admet une espérance $\mathbb{E}[X]$ définie par :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx.$$

Proposition III.2.4. Soit X une v.a.r. et $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $\phi(X)$ soit une v.a.r. (voir [C.1.5](#)). L'espérance de $\phi(X)$, lorsqu'elle existe, est égale à :

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f_X(x) dx,$$

où f_X est la densité de X .

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Remarque III.2.6. Une probabilité est une espérance dans le sens où pour tout $A \subset \mathbb{R}$ (borélien) :

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x) f_X(x) dx = \mathbb{E}[1_A(X)].$$

Remarque III.2.7. D'après la proposition III.2.4 et la remarque précédente, lorsque ϕ est strictement croissante, on a :

$$F_{\phi(X)}(y) = \mathbb{E}[1_{]-\infty, y]}(\phi(X))] = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(y)} f_X(x) dx.$$

Espérance

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.2.4 Indépendance

Exercices :

[Exercice A.1.8](#)

Définition III.2.5. *Les v.a.r. X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$:*

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2).$$

La proposition qui suit donne une condition d'indépendance plus simple à vérifier.

Proposition III.2.5. *X et Y sont indépendantes si et seulement si :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Définition III.2.6. *Les v.a.r. X_1, \dots, X_n sont indépendantes si, et seulement si, on a :*

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n),$$

où $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Proposition III.2.6. *Les v.a.r. X_1, \dots, X_n sont indépendantes si, et seulement si :*

$$\mathbb{E}[h_1(X_1) \times \dots \times h_n(X_n)] = \mathbb{E}[h_1(X_1)] \times \dots \times \mathbb{E}[h_n(X_n)] \quad (\text{III.2.1})$$

pour toutes les fonctions $h_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telles que (III.2.1) ait un sens.

Indépendance

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.2.5 Moments, médiane

Exercices :

[Exercice A.1.7](#)

Exemples :

[Exemple B.2](#)

Définition III.2.7. Soit X une v.a.r. absolument continue de densité f_X . On appelle moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ de X la quantité, lorsqu'elle existe, définie par $\mathbb{E}[X^r]$.

Définition III.2.8. On appelle moment centré d'ordre r de X , s'il existe, le réel μ_r défini par $\mu_r = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^r]$. μ_2 est appelé variance de X , elle est notée $\text{Var}(X)$ (parfois $\sigma^2(X)$), sa racine carrée, notée $\sigma(X)$ ou σ_X est appelée écart-type de X .

Remarque III.2.8. L'écart-type, comme la variance, mesure la tendance à s'écartier de la moyenne. De plus l'écart-type est une grandeur homogène à X .

Propriétés. Soient X et Y deux v.a. absolument continues. On a :

- a- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$;
- b- Si $X \leq Y$ avec probabilité 1, alors $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.
- c- $\text{Var}(aX) = a^2\text{Var}(X), a \in \mathbb{R}$.
- d- $\text{Var}(X + b) = \text{Var}(X), b \in \mathbb{R}$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

e- Si X_1, \dots, X_n sont des v.a.r. indépendantes alors :

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n).$$

Définition III.2.9. On appelle médiane de la v.a.r. X tout réel M qui satisfait :

$$P(X \leq M) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X \geq M) \geq \frac{1}{2}.$$

Remarque III.2.9. Lorsque X admet une f.d.r. continue et strictement croissante F la médiane est unique et est solution de $F(M) = 1/2$.

**Moments,
médiane**

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.3 Lois usuelles

III.3.1	Lois usuelles	20
---------	-------------------------	----

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.3.1 Lois usuelles

Exercices :

[Exercice A.1.9](#)

[Exercice A.1.10](#)

[Exercice A.1.11](#)

[Exercice A.1.12](#)

Documents :

[Document C.2.1](#)

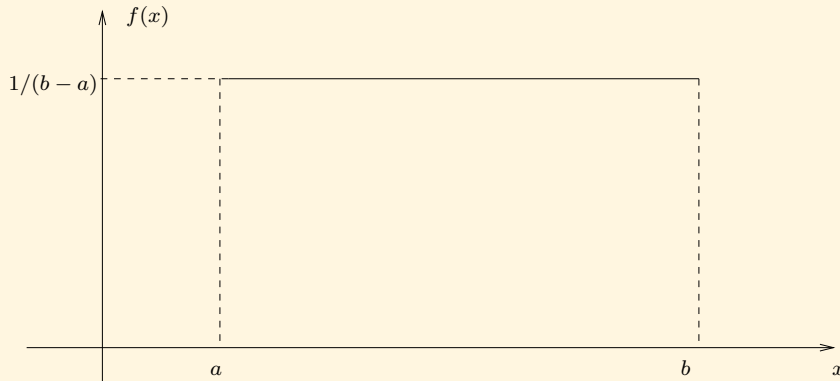
[Document C.2.2](#)

Loi Uniforme. Soit X une v.a.r. à valeurs dans $I = [a, b]$ ($a < b$) un intervalle de \mathbb{R} , alors X suit une loi uniforme sur I si elle admet une densité f définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x).$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



Un calcul simple montre que : $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$, $\mathbb{E}[X^2] = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$ et $\text{Var}(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$.

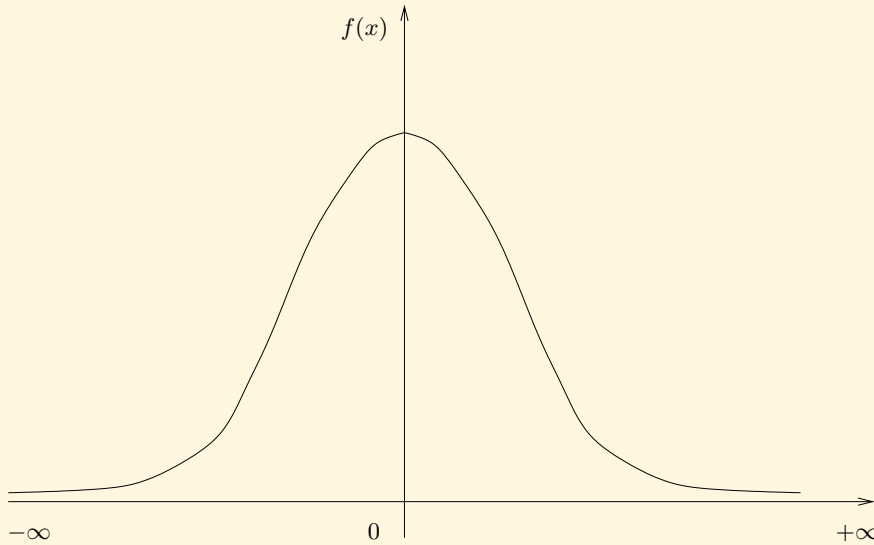
Loi Normale ou de Gauss. Soit X une v.a.r. On dit que X suit une loi normale centrée ($\mathbb{E}[X] = 0$) réduite ($\text{Var}(X) = 1$) et on note $X \sim N(0, 1)$ si X admet une densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2).$$

Lois usuelles

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



Soit Y une v.a.r. telle que $Y = \sigma X + \mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$). Alors

$$\mathbb{E}[Y] = \sigma \mathbb{E}[X] + \mu = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}[Y] = \sigma^2 \text{Var}[X] = \sigma^2.$$

De plus

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(X \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = F_X\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Donc

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Toute v.a.r. Y admettant la densité f_Y définie ci-dessus est dite normale de moyenne μ et de variance σ^2 ; on note alors $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Réciproquement si $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors $X = (Y - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$.

Proposition III.3.1. *Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ sont indépendantes alors $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.*

Loi exponentielle. Soit X une v.a.r. admettant pour densité f où f est définie par

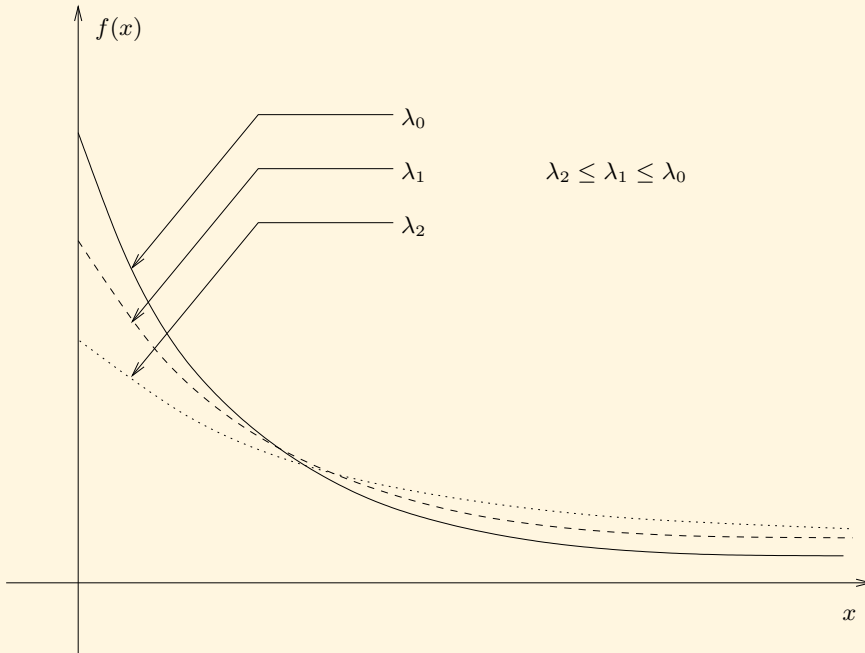
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{[0, +\infty[}(x).$$

Alors on dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et on note $X \sim E(\lambda)$.

Lois usuelles

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



On a $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$ et $\text{Var}[X] = 1/\lambda^2$ et la f.d.r. F est définie par :

$$F(x) = (1 - \exp(-\lambda x))1_{[0, +\infty[}(x).$$

Loi Gamma. Une v.a.r. X suit une loi gamma de paramètres $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

si elle admet une densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda \exp(-\lambda x) 1_{[0,+\infty[}(x),$$

où

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x) dx.$$

On note $X \sim \gamma(\alpha, \lambda)$ et on a $\mathbb{E}[X] = \alpha/\lambda$ et $\text{Var}[X] = \alpha/\lambda^2$. De plus, si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ alors $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$; on parle dans ce cas de loi d'Erlang.

Proposition III.3.2. Soient X_1, \dots, X_n n v.a.r. indépendantes et de même loi $E(\lambda)$. Alors $Y = X_1 + \dots + X_n \sim \gamma(n, \lambda)$.

Loi du chi-deux. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi du χ^2 à n degrés de liberté si $X \sim \gamma(n/2, 1/2)$ et on note $X \sim \chi^2(n)$. En fait, une v.a.r. X suit une telle loi lorsqu'elle s'écrit :

$$X = X_1^2 + \dots + X_n^2,$$

où les v.a.r. X_1, \dots, X_n sont i.i.d. de loi $N(0, 1)$. On a alors : $\mathbb{E}[X] = n$ et $\text{Var}(X) = 2n$.

III.4 Fonction génératrice des moments

III.4.1	Fonction génératrice des moments	27
---------	--	----

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.4.1 Fonction génératrice des moments

Exercices :

[Exercice A.1.13](#)

Définition III.4.1. *On appelle fonction génératrice des moments d'une v.a.r. X , la fonction M_X définie par :*

$$M_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)] = \int_{\mathbb{R}} \exp(tx) f_X(x) dx,$$

sur $\{t \in \mathbb{R} ; M_X(t) < +\infty\}$. Elle est définie sur un intervalle qui contient l'origine.

Remarque III.4.1. M_X est appelée fonction génératrice des moments (f.g.m.) à cause de la relation :

$$M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n], \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Cette transformation de f_X en M_X est aussi connue sous le nom de transformée de Laplace de la fonction f_X .

Exemple III.4.1 (loi $E(\lambda)$). Soit $X \sim E(\lambda)$ alors :

$$M_X(t) = \int_0^{+\infty} \lambda \exp(-(\lambda - t)x) dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{si } \lambda > t.$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Proposition III.4.1. Si M_X est définie sur $[-a, a]$ avec $a > 0$ alors :

a. X possède des moments finis de tous ordres ;

b.
$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} E[X^k].$$

TAB. III.1 – f.g.m. des lois usuelles.

Lois	f.g.m.
Uniforme $U(a, b)$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
Exponentielle $E(\lambda)$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$
Normale $N(\mu, \sigma^2)$	$e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2} + \mu t}$
Gamma $\gamma(\alpha, \lambda)$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha$

**Fonction
génératrice
des moments**

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.5 Somme de deux variables aléatoires, inégalités

III.5.1	Somme de deux v.a.r.	30
III.5.2	Inégalités	32

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.5.1 Somme de deux v.a.r.

Exercices :

[Exercice A.1.14](#)

Documents :

[Document B.4](#)

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes définies sur (Ω, \mathcal{F}, P) de f.d.r. (resp. densités) respectives F_X et F_Y (resp. f_X et f_Y).

Proposition III.5.1. *La fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire $Z = X + Y$, est donnée par le produit de convolution $F_X * F_Y$ de F_X et F_Y , c'est-à-dire :*

$$F_Z(x) = (F_X * F_Y)(x) = \int_{\mathbb{R}} F_X(x - y) f_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}} F_Y(x - y) f_X(y) dy.$$

*De plus, $Z = X + Y$ admet une densité f_Z donnée par $f_X * f_Y$, c'est-à-dire pour $x \in \mathbb{R}$:*

$$f_Z(x) = (f_X * f_Y)(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x - y) f_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f_Y(x - y) f_X(y) dy.$$

Démonstration. Voir le document [C.1.3](#).

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Corollaire III.5.1. *Si les v.a.r. X_1, \dots, X_n sont indépendantes, la loi de $X_1 + \dots + X_n$ est égale au produit de convolution des lois de X_i . La réciproque est fausse.*

Proposition III.5.2. *Si les v.a.r. X_1, \dots, X_n sont indépendantes alors :*

$$M_{X_1 + \dots + X_n}(t) = M_{X_1}(t) \dots M_{X_n}(t).$$

Démonstration. Comme les v.a.r. X_1, \dots, X_n sont indépendantes, on a :

$$\mathbb{E}[e^{t(X_1 + \dots + X_n)}] = \mathbb{E}[e^{tX_1} \times \dots \times e^{tX_n}] = \mathbb{E}[e^{tX_1}] \times \dots \times \mathbb{E}[e^{tX_n}].$$

d'après la proposition [III.2.1](#).

**Somme de
deux v.a.r.**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

III.5.2 Inégalités

Exercices :

[Exercice A.1.15](#)

[Exercice A.1.16](#)

Proposition III.5.3 (Inégalité de Bienaymé-Chebyshev). *Soit X une v.a.r. absolument continue admettant un moment d'ordre 2. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a :*

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration. Voir le document [C.1.4](#).

Proposition III.5.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Si les v.a.r. X et Y possèdent des moments d'ordre 2 alors :*

$$(\mathbb{E}[XY])^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2].$$

L'égalité est atteinte si et seulement si il existe une constante c telle que $Y = cX$ avec probabilité 1.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$0 \leq \mathbb{E}[(X + tY)^2] = \mathbb{E}[X^2] + 2t\mathbb{E}[XY] + t^2\mathbb{E}[Y^2].$$

Pour que le polynôme du second degré en t ci-dessus soit positif il est nécessaire que son discriminant Δ soit négatif ou nul. Ce qui conduit à

$$\Delta = 4(\mathbb{E}[XY])^2 - 4\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] \leq 0.$$

Proposition III.5.5 (Inégalité de Jensen). Soient X une v.a.r. et φ une fonction convexe sur \mathbb{R} . Alors

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}[X]).$$

Exemple. L'application $x \mapsto x^2$ est convexe sur \mathbb{R} ; par conséquent $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \geq 0$!

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A

Exercices

A.1	Exercices de cours	35
A.2	Exercices de travaux dirigés	53

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.1 Exercices de cours

A.1.1	36
A.1.2	37
A.1.3	38
A.1.4	39
A.1.5	40
A.1.6	41
A.1.7	42
A.1.8	43
A.1.9	44
A.1.10	45
A.1.11	46
A.1.12	47
A.1.13	48
A.1.14	49
A.1.15	50
A.1.16	51

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.1

Montrer que si X est une v.a.r. sur (Ω, \mathcal{F}, P) et $-\infty < a < b < +\infty$ alors $X^{-1}(]a, b])$, $X^{-1}([a, b])$, $X^{-1}([a, b[)$, $X^{-1}(] - \infty, a])$, $X^{-1}([a, +\infty[)$ et $X^{-1}(]a, +\infty[)$ sont bien des éléments de \mathcal{F} (ce qui justifie que l'on puisse calculer leurs probabilités!).

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2

Reprendre le schéma de “fonctionnement” de la loi d’une v.a.r. avec $\Omega = [-1, 1]$, P la probabilité géométrique sur Ω et $X(\omega) = \omega^2$ pour trouver p_X .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.3

Un point P est choisi au hasard uniformément dans un disque centré en O de rayon $\varrho > 0$. Soit R la v.a.r. donnant la distance entre les points O et P . Trouver la f.d.r. de R . Tracer son graphe.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.4

Soit X l'âge d'un individu. Soit F la fonction définie par $F(x) = (1 - \exp(-x))1_{[0, +\infty[}(x)$. Vérifier que F est une fonction de répartition. On suppose que F est la f.d.r. de X . Calculer $P(X \leq 0)$ et $P(X \geq s + t | X \geq s)$ pour $s > 0, t > 0$; interpréter les résultats. Montrer qu'il existe une fonction f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy.$$

Solution

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.5

Soit f définie par $f_X(x) = k(2 - x)1_{[0,1]}(x)$.

- a- Pour quelle valeur de k cette fonction est-elle une densité de probabilité?
Tracer son graphe.
- b- Calculer sa fonction de répartition et tracer son graphe.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.6

Soit f la fonction définie par $f(x) = kx^2 1_{[-1,1]}(x)$. Pour quelle valeur de k f est-elle une densité? Calculer la f.d.r. F correspondante. Soit X la v.a. admettant f pour densité. Calculer $\mathbb{E}(X^k)$ ($k \geq 1$) et $\text{Var}(X)$.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.7

Calculer la médiane d'une v.a.r. X admettant la densité f définie par $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{[0, +\infty[}(x)$.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.8

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes et de même loi. On suppose que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ est de même loi que X et Y . On suppose que cette loi est de variance finie σ^2 .

- a- Montrer que la loi de X est centrée.
- b- Montrer que si X_1, X_2, Y_1 et Y_2 sont des v.a.r. indépendantes de même loi que X , alors :

$$\frac{X_1 + X_2 + Y_1 + Y_2}{2}$$

a la même loi que X .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.9

Soit X une v.a. de loi normale centrée réduite.

- a- Retrouver en utilisant la densité, son espérance et sa variance.
- b- Soit Y une v.a.r. telle que $Y = \sigma X + \mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$). Trouver la densité Y . Calculer l'espérance et la variance de Y sans passer par leurs définitions.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.10

Calculer l'espérance et la variance de la loi d'Erlang.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.11

Un charpentier est amené à mesurer et couper un tronc de longueur L en son centre O pour en faire une poutre. Montrer que si les erreurs de mesure sont uniformément distribuées sur un intervalle centré en O , de $2k \leq L$ cm de longueur, l'espérance est nulle. Pourquoi ce résultat est-il moins rassurant à mesure que k augmente ?

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.12

Supposons que la durée de vie d'une ampoule électrique d'un certain type suit une loi normale de moyenne $m = 180$ heures et d'écart-type $\sigma = 20$ heures. Dans un ensemble de quatre de ces ampoules :

- a- quelle est la probabilité que les quatre ampoules aient une durée de vie supérieure à 200 heures ?
- b- quelle est la probabilité de pouvoir éclairer une pièce pendant plus de 800 heures avec ces ampoules ?

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.13

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes. Montrer, en utilisant la fonction génératrice des moments, que si X suit la loi $\gamma(\alpha, \beta)$ et Y la loi $\gamma(\mu, \beta)$ alors la v.a.r. $X + Y$ suit la loi $\gamma(\alpha + \mu, \beta)$.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.14

Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi $U(0, 1)$. Calculer la f.d.r. et la densité de $X + Y$.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.15

Montrer que si $x > 0$, alors :

$$P(X > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2/2) dt \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2).$$

Indication. Remarquer que pour $t \in [x, +\infty[$, $1 \leq \frac{t}{x}$.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.16

Montrer que si $g(x) \geq 0$, pour tout x et $g(x) \geq c > 0$, pour $x \in]\alpha, \beta[$, alors :

$$P(X \in]\alpha, \beta[) \leq c^{-1} \mathbb{E}[g(X)].$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de travaux dirigés

A.2.1	54
A.2.2	55
A.2.3	56
A.2.4	57
A.2.5	58
A.2.6	59
A.2.7	60
A.2.8	61
A.2.9	62
A.2.10	63
A.2.11	64
A.2.12	65
A.2.13	66
A.2.14	67
A.2.15	68
A.2.16	69
A.2.17	70
A.2.18	71
A.2.19	72
A.2.20	73

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



A.2.21	74
A.2.22	75
A.2.23	76
A.2.24	77
A.2.25	78
A.2.26	79
A.2.27	80
A.2.28	81
A.2.29	82
A.2.30	83
A.2.31	84
A.2.32	85
A.2.33	86
A.2.34	88
A.2.35	89

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



Exercice A.2.1

Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction de répartition est au plus infini dénombrable.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.2

Un tireur à l'arc vise le centre d'une cible de rayon $R > 0$. La probabilité qu'il atteigne la cible est p ($0 < p < 1$). Si la cible est touchée, la probabilité qu'une zone donnée de la cible soit atteinte est uniforme. Lors d'un concours, les points sont attribués comme suit :

$-k$ points si la cible n'est pas atteinte ;

$R-r$ points lorsque la cible est atteinte, où r est la distance (aléatoire) séparant le centre de la cible du point d'impact sur la cible.

Le gain du tireur, pour un seul tir, est une v.a.r. X . Donner la fonction de répartition F_r de la v.a.r. r lorsque la cible est atteinte. Donner la fonction de répartition F_X de X . A quels types de v.a.r. a-t-on affaire ?

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.3

Soient X_1, \dots, X_n n v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). On définit $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $N_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$. Quelles sont les fonctions de répartition de M_n et N_n ? Supposons que la loi des X_i soit uniforme sur $[0, 1]$, vers quoi converge la f.d.r. F_{M_n} lorsque $n \rightarrow +\infty$? Quelle interprétation donner à ce résultat?

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.4

- a- Soit X une variable aléatoire réelle de densité f telle que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$.
- i- Montrer que si f est paire alors $\mathbb{E}(X) = 0$;
 - ii- Montrer que si le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = x_0$ alors $\mathbb{E}(X) = x_0$;
- b- Les fonctions de répartition suivantes ont-elles des densités (si oui, expliciter la densité, si non, justifier la réponse)?
- i- $F_1(x) = (1 - \exp(-x^3))1_{[0,+\infty[}(x)$;
 - ii- $F_2(x) = (1 - \exp(-x))1_{[1,+\infty[}(x)$.
- c- Soit g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = a/(1 + x^2)$.
- i- A quelle condition g est-elle une densité?
 - ii- Montrer qu'une variable aléatoire X , de densité g , n'a pas de moyenne.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5

Soit X une v.a.r. de f.d.r. F . On suppose F continue. Donner la loi de probabilité de $F(X)$. (On pourra supposer F strictement croissante dans un premier temps.)

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6

Un appareil électronique est soumis à des impulsions séparées par des intervalles de temps variables indépendants les uns des autres. On considère que la durée T (exprimée en secondes) séparant deux impulsions successives est une variable aléatoire définie par $T = 2 + 5X$, où X suit la loi $E(1)$.

- I- Exprimer la fonction de répartition F_T en fonction de F_X , en déduire la densité de T .
- II- Calculer les probabilités des événements suivants :
 - a- la durée séparant deux impulsions est inférieure à deux secondes.
 - b- la durée séparant deux impulsions est comprise entre deux et cinq secondes.
- III- Calculer la durée moyenne séparant deux impulsions et sa variance.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7

Soit X une v.a. qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Y = X^2$ et $Z = e^X$. Déterminer les densités de probabilités des v.a. Y et Z .

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes. Montrer en utilisant le produit de convolution ou la fonction génératrice de moments que si : X suit la loi $N(m, \sigma^2)$ et Y la loi $N(l, \rho^2)$ alors la v.a.r. $X + Y$ suit la loi $N(m + l, \sigma^2 + \rho^2)$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.9

Un promoteur organise une petite réunion amicale avec les personnes influentes qui lui ont écarté les obstacles pour construire un immeuble de grand standing sur l'emplacement d'un square, rénové un an auparavant par une de ses filiales (au frais des contribuables). Les serveurs présentent à chacun des cent cinquante convives une coupe de caviar servi à la louche. Une louche contient en moyenne 140 gr. de caviar avec un écart-type de 11 gr. Sachant que le bélouga utilisé revient à 8500F. le Kg., on note X le prix du premier service de caviar.

- a- Etablir la loi de X , son espérance et son écart-type.
- b- Calculer la probabilité d'avoir servi pour moins de 170000 F de caviar.
- c- Reprendre le problème avec les deux cent cinquante ouvriers du chantier, des oeufs de lump à 82 F le kilo servis dans un verre de cantine avec une cuillère de contenance moyenne de 45 gr., avec un écart-type de 7 gr.
- d- Calculer la probabilité d'avoir dépensé plus de 1000 F d'ersatz.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.10

Une machine fabrique des résistances électriques dont la valeur en ohms est une variable aléatoire R de loi normale $N(100; 9)$. Une seconde machine fabrique des résistances dont la valeur en ohms est une variable aléatoire R' de loi normale $N(200; 16)$.

- a- Quelle est la loi suivie par la résistance obtenue en montant en série deux résistances prélevées au hasard dans les productions respectives de la première et de la seconde machine ?
- b- Quelle est la probabilité qu'une telle résistance soit comprise entre 290 et 305 ohms ?

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.11

Soit Y une v.a. de densité : $be^{-x}1_{[2,\infty[}(x)$ où b est une constante positive.

- a- Déterminer la valeur de b .
- b- On pose $Z = [Y]$. Calculer $P(Z = n)$.
- c- On pose $X = Y - [Y]$, où $[Y]$ est la partie entière de Y . Calculer $E(X)$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.12

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $E(1)$.

- a- Calculer la fonction de répartition de $-X$.
- b- En déduire la densité de $-X$.
- c- Montrer que la densité f_Z de $Z = Y - X$ est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- d- Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\text{Var}(Z)$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.13

Soient X une variable aléatoire X de loi $N(0, 1)$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ avec $P(Y = 1) = p$, pour $p \in]0, 1[$. On suppose que X et Y sont indépendantes. On considère la variable aléatoire $Z = XY$. Montrer que X et Z ont même loi. Sont-elles indépendantes ?

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.14

Soit Y une v.a. réelle uniformément distribuée sur l'intervalle $[3, 6]$. Pour tout $n > 0$, on pose $X_n = 5n^2$, si $3 \leq Y \leq 3 + 4/n^2$ et $X_n = 0$, sinon.

- a- Déterminer $E(X_n)$ et $E(X_n^2)$.
- b- Calculer $E(X_{n+1}X_{n+2})$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.15

On considère une v.a.r. X centrée et de variance finie σ^2 .

a- Montrer que , pour tout $a > 0$,

$$a \leq \mathbb{E}[(a - X)1_{]-\infty, a]}(X)] \leq \{P(X \leq a)\}^{1/2} \{\sigma^2 + a^2\}^{1/2}.$$

En déduire que :

$$P(X > a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

b- Une usine fabrique chaque semaine un nombre aléatoire d'objets Y . On suppose $\mathbb{E}(Y) = 100$ et $\text{Var}(Y) = 400$. Trouver à l'aide de la question précédente un majorant de la probabilité que la production hebdomadaire dépasse 120. Comparer ce résultat avec celui obtenu par l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.16

Selon les lois de Mendel une certaine variété de pois de senteur a une probabilité $1/4$ de fleurir blanche et une probabilité $3/4$ de fleurir rose ou rouge. Combien faut-il observer de fleurs de cette espèce pour que la fréquence du nombre de fleurs blanches ne s'écarte pas plus de $0,05$ de la fréquence observée (on admet $0,01$ d'erreur).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.17

Soit X une variable aléatoire dont la densité f est définie par $f_X(x) = a \exp(-x)1_{[0,+\infty[}(x)$.

- a- Déterminer a et tracer le graphe de f .
- b- Calculer la fonction de répartition de X .
- c- Calculer l'espérance et la variance de X .

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.18

Une tension électrique aléatoire X (mesurée en volts) de densité de probabilité $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+}(x)$, ($\lambda > 0$) passe par un limiteur qui “coupe” toutes les valeurs de la tension inférieures à u_1 et supérieures à u_2 , ($0 < u_1 < u_2 < \infty$), dans le premier cas en l’élevant à u_1 et dans le deuxième cas en la réduisant à u_2 . Notons Y la variable aléatoire désignant la tension issue du limiteur.

- Calculer $P(Y = u_1)$ et $P(Y = u_2)$. Quel est le type de la variable aléatoire Y ?
Ecrire Y en fonction de la variable aléatoire X .
- Donner la fonction de répartition de Y ; tracer son graphe.
- Calculer l’espérance mathématique et la variance de Y .

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.19

Soient X et Y deux variables aléatoires positives, indépendantes, suivant une même loi définie par sa densité $f_X(x) = xe^{-x}1_{\mathbb{R}_+}(x)$.

- a- Vérifier que f est bien une densité.
- b- Calculer $\mathbb{E}[X^n]$ (par récurrence) et la variance de X .
- c- Pour $\alpha > -1$, calculer $\mathbb{E}[\exp(-\alpha X)]$.
- d- Déterminer la fonction de répartition de X .
- e- On pose $T = \inf\{X, Y\}$. Calculer la fonction de répartition de T .

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.20

Considérons une suite de variables aléatoires X_1, X_2, \dots indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle $E(\lambda)$. On note f_1 la densité d'une de ces variables aléatoires.

- a- Montrer que la densité de $X_1 + X_2$ est $f_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} 1_{\mathbb{R}_+}(t)$.
- b- Montrer par récurrence que la densité de probabilité f_n de $X_1 + \dots + X_n$ est définie par :

$$f_n(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} 1_{\mathbb{R}_+}(t).$$

- c- Soit Y une variable aléatoire indépendante des X_i , de loi géométrique $G(p)$ avec $0 < p < 1$. Calculer la densité de la variable aléatoire $Z = \sum_{i=1}^Y X_i$.
- d- Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z .

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.21

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1, \\ x + 1 & \text{si } x \in [-1, 0], \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

- a- Montrer que f est une densité de probabilité. Soit X une v.a.r. de densité f .
- b- Déterminer la fonction de répartition de X .
- c- Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\text{Var}(X)$. Justifier sans calcul la valeur de $\mathbb{E}[X]$.
- d- Déterminer $P(|X| \geq a)$.
- e- Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $P(|X| \geq a) \leq \frac{1}{6a^2}$.
- f- Soit Y la variable aléatoire uniforme sur $[-1, 1]$, indépendante de X . Calculer $P((X, Y) \in [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2])$.
- g- Soit $Z = \min(X, Y)$. Quelle est la loi de Z ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.22

On suppose que la charge de rupture d'un fil est une variable aléatoire X de moyenne $m = 851$ grammes et d'écart-type 71 grammes. D'après l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev, que peut-on dire de la probabilité de l'événement $\{X \leq m + 2\sigma\}$? Que signifie cette probabilité?

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.23

Soit Y une v.a.r. définie par : $Y = m + \theta$ où la v.a.r. θ suit la loi $N(0, 1)$ ¹ et soit $X = \exp(Y)$.

1. Déterminer la densité f_X de la variable aléatoire X .
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.
3. Donner la fonction génératrice des moments de la v.a. Y . En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.

¹de densité $f_\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-t^2/2\}1_{\mathbb{R}}(t)$

Exercice A.2.24

Considérons une bouche du métro. On suppose que le nombre X_t de voyageurs sortant de cette bouche pendant le temps t , suit une loi de Poisson de paramètre λt , c'est-à-dire pour $n \in \mathbb{N}$ $P(X_t = n) = \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^n}{n!}$. Un observateur se poste à la sortie de la bouche du métro et il s'écoule un temps T avant la sortie du premier voyageur. On suppose de plus que le métro fonctionne 24h sur 24h.

1. Que signifie l'événement $\{T > t\}$ où $t \in \mathbb{R}^+$. Calculer sa probabilité et en déduire la densité de T .
2. Montrer que $P(T > t + s | T > s) = P(T > t)$ où $s \in \mathbb{R}^+$.
3. On définit la fonction $G(x) = \ln(1 - F_T(x))$ où $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) En utilisant la définition de la probabilité conditionnelle et la question 2, donner l'expression de $\ln(P(T > t + s | T > s))$ en utilisant la fonction G .
 - (b) Montrer que $G(x) = ax$, satisfait la relation ci-dessus, et dire comment doit être le paramètre a . Retrouver $F_T(t)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.25

Montrer que si X et Y sont i.i.d., alors pour tout $t > 0$:

$$P(|X - Y| > t) \leq 2P\left(|X| > \frac{t}{2}\right).$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.26

Pour fonctionner, un système utilise une cellule interchangeable. On dispose de la pièce originale et d'une cellule de rechange, chacune d'une durée de vie aléatoire X (en mois). Si la densité f de X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-x/2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

quelle est la fiabilité du système au bout de 5 mois ? Calculer le taux de défaillance de ce système.

Indications. On appelle fiabilité du système la fonction R définie par $R(x) = P(X > x)$. On appelle taux de défaillance du système la fonction λ définie par $\lambda(x) = f(x)/R(x)$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.27

Soit X une variable aléatoire normale $N(0, 2)$ et soit $Y = \exp(-\alpha X^2)$ avec $\alpha > 0$. Donner la loi de Y et son espérance.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.28

Calculer l'espérance et la variance d'une loi de Weibull de paramètres (λ, α) , dont la densité est $\lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha} 1_{\mathbb{R}_+}(t)$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.29

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω . On note F_X la fonction de répartition de X .

- I- Montrer que F_X est croissante.
- II- Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé et $\varepsilon > 0$. On pose $A_\varepsilon = \{X \in] - \infty, x + \varepsilon]\} \cap \overline{\{X \in] - \infty, x]\}}$.
 - a- Montrer que si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ alors $A_{\varepsilon_1} \subset A_{\varepsilon_2}$.
 - b- Montrer que $\bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon = \emptyset$.
- III- Montrer que pour chaque $\varepsilon > 0$ on a : $F_X(x + \varepsilon) - F_X(x) = P(A_\varepsilon), \forall x \in \mathbb{R}$.
- IV- Dédurre de ce qui précède que F_X est continue à droite en chacun de ses points de discontinuité.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.30

Soient X, Y et Z trois v.a.r. indépendantes de même loi uniforme sur $[-1, +1]$.
Calculer la loi de $X + Y$, $\frac{X+Y}{2}$, $X + Y + Z$ et $\frac{X+Y+Z}{3}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.31

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = ae^x 1_{]-\infty, -\ln 2]}(x) + be^{-x} 1_{[\ln 2, +\infty[}(x).$$

- a- Quelles conditions doivent satisfaire a et b pour que f soit une densité ?
- b- On suppose que $a = b$, donner l'expression de f et l'allure de son graphe.
- c- Soit X une variable aléatoire admettant une densité f . La variable aléatoire X peut-elle être centrée (ne pas calculer $\mathbb{E}(X)$) ? A quelle condition sur a et b , X est-elle centrée (toujours sans calculer $\mathbb{E}(X)$) ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.32

Dans un atelier on assemble 100 ordinateurs par jour. En général, 99% des ordinateurs assemblés fonctionnent lorsqu'on les teste. Soit X le nombre d'ordinateurs en état de marche parmi les ordinateurs assemblés un jour donné.

- a- Quelle est la loi de X ?
- b- Quelle relation existe-t-il entre les événements $\{X \leq 95\}$ et $\{|X - 99| \geq 4\}$?
- c- Donner une majoration de $P(|X - 99| \geq 4)$, puis en déduire une majoration de $P(X < 95)$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.33

Soit X une v.a. positive de densité f continue et de fonction de répartition (Fdr) F .

1. Soit $s > 0$, montrer que : $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} P(t < X \leq t + s | X \geq t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$, $t \geq 0$.

On appelle cette dernière quantité le taux de défaillance de X et on note h cette fonction i.e. $h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$, $t \geq 0$.

2. On suppose que la v.a. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, i.e. de densité $f(x) = \lambda \exp\{-\lambda x\} 1_{[0, +\infty[}(x)$.

(a) Calculer la Fdr et le taux de défaillance de X .

(b) Soit Y une v.a. positive admettant une densité continue g et un taux de défaillance constant égal à $\mu > 0$. Montrer qu' alors la Fdr G de Y satisfait une équation différentielle. En déduire une expression de g , puis que Y suit une loi exponentielle de paramètre μ .

3. On considère un circuit électronique constitué de r résistances indépendantes ayant des durées de fonctionnement aléatoires X_1, \dots, X_n de même loi que X .

(a) Ces résistances sont montées en série de sorte que le circuit tombe en panne dès que l'une des résistances tombe en panne. Soit T la durée

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

de bon fonctionnement du circuit. Quelle relation lie T aux variables X_i ? En déduire la Fdr de T puis son taux de défaillance.

- (b) Ces résistances sont montées en parallèle de sorte que le circuit tombe en panne lorsque toutes les résistances sont tombées en panne. Quelle relation lie T aux variables X_i ? En déduire la Fdr de T puis son taux de défaillance.

**Exercice
A.2.33**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.34

- a- Donner la densité d'une variable aléatoire X de loi $N(0, 1)$ (normale centrée réduite).
- b- Soit $Y = X^2$. Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X .
- c- En déduire la densité de Y .
- d- En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(-x/2) dx$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.35

Soit f la fonction définie par $f(x) = c_1 1_{[-2,-1]}(x) + c_2 1_{[1,2]}(x)$.

- a- Quelles conditions doivent vérifier c_1 et c_2 pour que f soit une densité?
- b- Soit X une variable aléatoire de densité f . Soit $Y = 1_{]0,+\infty[}(X) - 1_{]-\infty,0[}(X)$.
Exprimer la loi p_Y de Y en fonction de c_1 et c_2 .
- c- Calculer la variance de Y .

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B

Exemples

B.1	Représentation en base dix d'un nombre	91
B.2	Médiane	94
B.3	Fonction de répartition	95
B.4	Convolution	97

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1 Représentation en base dix d'un nombre

On choisit un nombre “au hasard” dans $[0, 1]$. Pour ne favoriser aucun nombre de $[0, 1]$ on choisit un nombre de la manière suivante. Un nombre $x \in [0, 1]$ est représenté en base dix de la manière suivante :

$$\omega = 0, x_1 x_2 x_3 \dots \quad \text{où} \quad x_i \in \{0, 1, \dots, 9\}, \forall i \in \mathbb{N}^*,$$

où l'équivoque sur le développement décimal est levée en prenant la convention

$$0, 1999 \dots \equiv 0, 2.$$

Les x_i sont choisis dans $\Theta = \{0, 1, \dots, 9\}$ de manière indépendante et avec équiprobabilité. L'univers est donc défini par $\Omega = \Theta \times \Theta \times \dots = \Theta^{\mathbb{N}}$; il s'agit donc d'un produit infini dénombrable de Θ . Soit (Ω, \mathcal{F}, P) l'espace probabilisé correspondant (dont on suppose l'existence) et $X : \Omega \rightarrow [0, 1]$ définie par $X(\omega) = x$ (dont on suppose que c'est une v.a.r.).

Voyons ainsi comment calculer $P(X \leq 0, 25)$. Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} \{X \leq 0, 25\} &= \{x_1 = 0; x_2 \in \Omega; x_3 \in \Omega; \dots\} \\ &\cup \{x_1 = 1; x_2 \in \Omega; x_3 \in \Omega; \dots\} \\ &\cup \{x_1 = 2; x_2 \leq 4; x_3 \in \Omega; x_4 \in \Omega; \dots\} \\ &\cup \{x_1 = 2; x_2 = 5; x_3 = 0; x_4 = 0; \dots\}. \end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



La réunion ci-dessus étant disjointe, on a

$$P(X \leq 0,25) = \left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} \times \frac{5}{10}\right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0,25.$$

Plus généralement on trouve

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

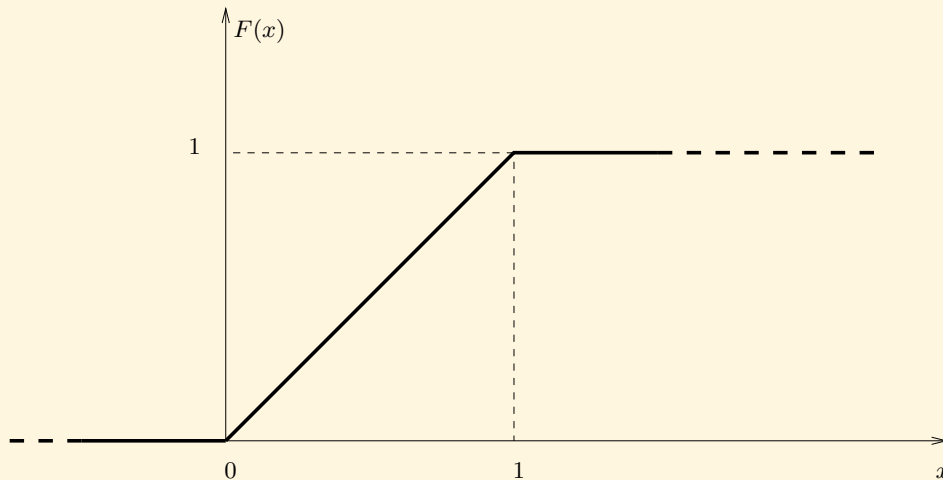
On remarque que la loi de probabilité de X correspond à la mesure de probabilité uniforme sur $[0, 1]$. Il est alors facile de voir que le graphe de F_X est

Exemple B.1

Représentation
en base dix
d'un nombre

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



Exemple B.1
Représentation
en base dix
d'un nombre

Paradoxe? Cette manière de choisir un nombre dans $[0, 1]$ fait que X prendra toujours une valeur. Malgré tout, la probabilité que X prenne une valeur donnée est nulle puisque :

$$P(X = x) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0.$$

Ça ne contredit pas les axiomes de probabilité car il serait **faux** d'écrire :

$$P(X \in [0, 1]) = \sum_{x \in [0, 1]} P(X = x)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

car ici $[0, 1]$ n'est pas dénombrable !

Exemple B.1
Représentation
en base dix
d'un nombre

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.2 Médiane

Dans le cas de l'exemple précédent, il est clair que $M \in]0, 1[$ par conséquent M est solution de $F_X(M) = 1/2$ et donc $M = 1/2$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.3 Fonction de répartition

Soit X une v.a. dont la f.d.r. vérifie

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

On définit

$$Y = \max(1/2, X).$$

Y est une v.a.r. sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[1/2, 1]$. En effet

$$\{Y \leq y\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } y < 1/2, \\ \{X \leq y\} & \text{si } y \geq 1/2. \end{cases}$$

On a alors :

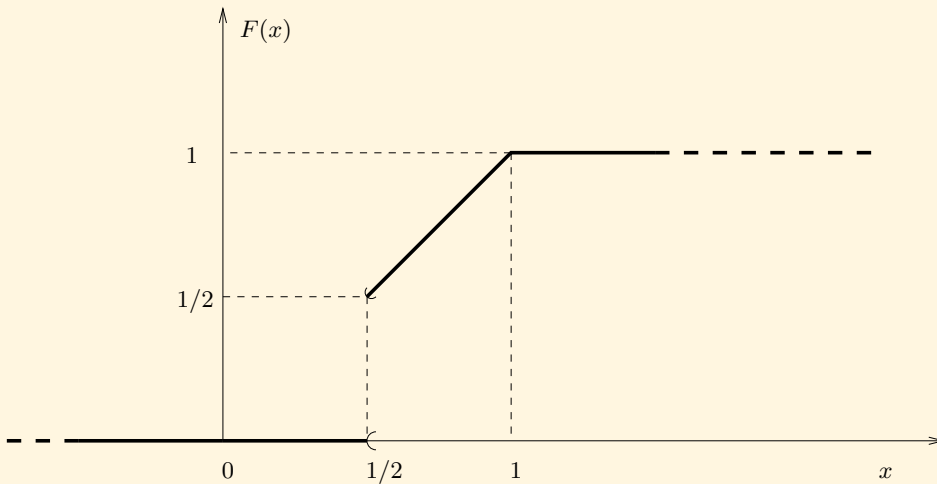
$$F_Y(y) = p_Y([-\infty, y]) = \begin{cases} p_X(\emptyset) & \text{si } y < 1/2 \\ p_X([-\infty, y]) & \text{si } y \geq 1/2 \end{cases} = y1_{[1/2, 1]}(y) + 1_{]1, +\infty[}(y).$$

Le graphe de F_Y est donc donné par :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.3
Fonction de répartition



F_Y n'est ni constante par morceaux (comme les v.a.r. discrètes) ni continue (comme les v.a.r. à densité). Une telle v.a.r. est dite mixte.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.4 Convolution

Soit $X \sim U([0, 1])$ et $Y \sim E(1)$ indépendantes ; alors la densité de $Z = X + Y$ est donnée par

$$f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,1]}(x-y) \exp(-y) 1_{[0,+\infty[}(y) dy.$$

Remarquons que :

$$1_{[0,1]}(x-y) 1_{[0,+\infty[}(y) = 1_{]-\infty, 0[}(x) + 1_{[0,x]}(y) 1_{[0,1]}(x) + 1_{]1,+\infty[}(x) 1_{[x-1,x]}(y).$$

Il vient donc

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[, \\ \int_0^x \exp(-y) dy & \text{si } x \in [0, 1], \\ \int_{x-1}^x \exp(-y) dy & \text{si } x \in]1, +\infty[, \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[, \\ 1 - \exp(-x) & \text{si } x \in [0, 1], \\ \exp(1-x) - \exp(-x) & \text{si } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C

Documents

C.1	Démonstrations	99
C.2	Tables de la loi normale	107

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

C.1 Démonstrations

C.1.1	Démonstration du théorème 3.1.1	100
C.1.2	Démonstration de la proposition 3.2.1	102
C.1.3	Démonstration de la proposition 3.5.1	103
C.1.4	Démonstration de la proposition 3.5.3	105
C.1.5	Applications mesurables	106

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.1 Démonstration du théorème 3.1.1

Loi de probabilité $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ étant probabilisable, il suffit de vérifier que

- (i) $P_X(\mathbb{R}) = 1$;
- (ii) Pour toute suite $(B_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de \mathcal{B} deux à deux disjoints

$$P_X \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_X(B_n).$$

Pour (i) nous avons $P_X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R}))$. Or $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$ donc $P_X(\mathbb{R}) = P(\Omega) = 1$ car (Ω, \mathcal{F}, P) est un espace probabilisé.

Pour (ii) nous avons

$$P_X \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right) = P \left(X^{-1} \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right) \right),$$

où

$$X^{-1} \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right) = \left\{ \omega \in \Omega ; X(\omega) \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right\}.$$

Notons $A_n = X^{-1}(B_n)$ pour $n \geq 1$ alors $A_n \in \mathcal{F}$ puisque X est une v.a.r. Soit $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega \in A_{n_0}$ donc $X(\omega) \in B_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

soit encore $\omega \in X^{-1} \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right)$. Nous avons donc

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset X^{-1} \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right).$$

Maintenant si $\omega \in X^{-1} \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right)$ alors $X(\omega) \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ donc il existe n_0 tel que $X(\omega) \in B_{n_0}$ soit encore $\omega \in A_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Par conséquent

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \supset X^{-1} \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right),$$

et finalement

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = X^{-1} \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right).$$

Par suite

$$P_X \left(X^{-1} \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right) \right) = P \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_X(B_n)$$

car P est une mesure de probabilité et il est facile de voir que les A_n sont deux à deux disjoints. D'où le résultat du théorème.

Document

C.1.1

Démonstration
du théorème
3.1.1

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Document C.1.2 Démonstration de la proposition 3.2.1

Fonction de répartition, densité Pour $a > 0$, nous avons :

$$0 \leq P(X = x) \leq P(x - a < X \leq x),$$

soit : $0 \leq P(X = x) \leq F(x) - F(x - a)$, comme F est une fonction continue :

$$\lim_{a \searrow 0} F(x) - F(x - a) = 0,$$

d'où $P(X = x) = 0$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.3 Démonstration de la proposition 3.5.1

Somme de deux variables aléatoires Soit $\tau = \{y_i; i \in \mathbb{Z}\}$ avec $y_i < y_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et $\cup_{i \in \mathbb{Z}}]y_{i-1}, y_i] = \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{R}$, $|y_i - y_{i-1}| \leq \Delta$ avec $\Delta > 0$. On note $A_i = \{Y \in]y_{i-1}, y_i]\}$ alors :

$$\{X + Y \leq x\} = \cup_{i \in \mathbb{Z}} \{X + Y \leq x\} \cap A_i,$$

or pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\cup_{i \in \mathbb{Z}} \{X \leq x - y_i\} \cap A_i \subset \{X + Y \leq x\} \subset \cup_{i \in \mathbb{Z}} \{X \leq x - y_{i-1}\} \cap A_i.$$

soit

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} P(X \leq x - y_i)P(Y \in]y_{i-1}, y_i]) \leq P(X + Y \leq x) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} P(X \leq x - y_{i-1})P(Y \in]y_{i-1}, y_i]).$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} P(X \leq x - y_i)P(Y \in]y_{i-1}, y_i]) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{y_{i-1}}^{y_i} P(X \leq x - y_i) f_Y(y) dy \\ &\geq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{y_{i-1}}^{y_i} F_X(x - y - \Delta) f_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}} F_X(x - y - \Delta) f_Y(y) dy. \end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

De même on montre que :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} P(X \leq x - y_{i-1})P(Y \in]y_{i-1}, y_i]) \leq \int_{\mathbb{R}} F_X(x - y + \Delta) f_Y(y) dy.$$

Il vient donc :

$$\int_{\mathbb{R}} F_X(x - y - \Delta) f_Y(y) dy \leq P(X + Y \leq x) \leq \int_{\mathbb{R}} F_X(x - y + \Delta) f_Y(y) dy.$$

Puis, en faisant tendre Δ vers 0 (des justifications s'imposent pour le passage à la limite) on obtient :

$$F_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} F_X(x - y) f_Y(y) dy.$$

Enfin, en justifiant la dérivation sous le signe somme, on montre qu'aux points x où F_{X+Y} est dérivable on a :

$$f_{X+Y}(x) = \frac{dF_{X+Y}}{dx}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dF_X}{dx}(x - y) f_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f_X(x - y) f_Y(y) dy.$$

Document
C.1.3

Démonstration
de la
proposition
3.5.1

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Document C.1.4 Démonstration de la proposition 3.5.3

Inégalités Notons $\mathbb{E}[X] = m$ et f_X la densité de X . On constate que :

$$P(|X - m| > \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} 1_{\{|x-m|>\varepsilon\}} f_X(x) dx.$$

Or il est clair que

$$1_{\{|x-m|>\varepsilon\}} \leq \frac{(x - m)^2}{\varepsilon^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il vient donc

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{\{|x-m|>\varepsilon\}} f_X(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} (x - m)^2 f_X(x) dx = \frac{\mathbf{Var}[X]}{\varepsilon^2}.$$

d'où le résultat.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.5 Applications mesurables

Une application $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, si l'image réciproque par ϕ de tout ensemble borélien est un ensemble borélien. Ainsi, si X est une v.a.r. sur (Ω, \mathcal{F}, P) , alors $Y = \phi(X)$ est aussi une v.a.r. sur (Ω, \mathcal{F}, P) . En effet, si \mathcal{B} est la tribu des boréliens de \mathbb{R} , on a :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \{Y \in B\} = \{\phi(X) \in B\} = \{X \in \phi^{-1}(B)\}$$

or $\phi^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ donc $\{X \in \phi^{-1}(B)\} \in \mathcal{F}$ puisque X est une v.a.r.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

C.2 Tables de la loi normale

C.2.1	Fonction de répartition	108
C.2.2	Quantiles	111

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



Document C.2.1 Fonction de répartition

Document C.2.1

$$\Phi(x) = P(X \leq x) \text{ où } X \sim N(0, 1) \text{ et } x = x_1 + x_2$$

x_1	x_2									
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

Fonction de répartition

Lois usuelles

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



Remarque. Si $x \leq 0$ alors utiliser $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

Document C.2.1

Fonction de
répartition

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.2 Quantiles

Document C.2.2 Quantiles

		$u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ où $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$									
		α_2									
α_1		0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.50		0.0000	0.0025	0.0050	0.0075	0.0100	0.0125	0.0150	0.0175	0.0201	0.0226
0.51		0.0251	0.0276	0.0301	0.0326	0.0351	0.0376	0.0401	0.0426	0.0451	0.0476
0.52		0.0502	0.0527	0.0552	0.0577	0.0602	0.0627	0.0652	0.0677	0.0702	0.0728
0.53		0.0753	0.0778	0.0803	0.0828	0.0853	0.0878	0.0904	0.0929	0.0954	0.0979
0.54		0.1004	0.1030	0.1055	0.1080	0.1105	0.1130	0.1156	0.1181	0.1206	0.1231
0.55		0.1257	0.1282	0.1307	0.1332	0.1358	0.1383	0.1408	0.1434	0.1459	0.1484
0.56		0.1510	0.1535	0.1560	0.1586	0.1611	0.1637	0.1662	0.1687	0.1713	0.1738
0.57		0.1764	0.1789	0.1815	0.1840	0.1866	0.1891	0.1917	0.1942	0.1968	0.1993
0.58		0.2019	0.2045	0.2070	0.2096	0.2121	0.2147	0.2173	0.2198	0.2224	0.2250
0.59		0.2275	0.2301	0.2327	0.2353	0.2378	0.2404	0.2430	0.2456	0.2482	0.2508
0.60		0.2533	0.2559	0.2585	0.2611	0.2637	0.2663	0.2689	0.2715	0.2741	0.2767
0.61		0.2793	0.2819	0.2845	0.2871	0.2898	0.2924	0.2950	0.2976	0.3002	0.3029
0.62		0.3055	0.3081	0.3107	0.3134	0.3160	0.3186	0.3213	0.3239	0.3266	0.3292
0.63		0.3319	0.3345	0.3372	0.3398	0.3425	0.3451	0.3478	0.3505	0.3531	0.3558
0.64		0.3585	0.3611	0.3638	0.3665	0.3692	0.3719	0.3745	0.3772	0.3799	0.3826
0.65		0.3853	0.3880	0.3907	0.3934	0.3961	0.3989	0.4016	0.4043	0.4070	0.4097
0.66		0.4125	0.4152	0.4179	0.4207	0.4234	0.4261	0.4289	0.4316	0.4344	0.4372
0.67		0.4399	0.4427	0.4454	0.4482	0.4510	0.4538	0.4565	0.4593	0.4621	0.4649
0.68		0.4677	0.4705	0.4733	0.4761	0.4789	0.4817	0.4845	0.4874	0.4902	0.4930
0.69		0.4959	0.4987	0.5015	0.5044	0.5072	0.5101	0.5129	0.5158	0.5187	0.5215
0.70		0.5244	0.5273	0.5302	0.5330	0.5359	0.5388	0.5417	0.5446	0.5476	0.5505
0.71		0.5534	0.5563	0.5592	0.5622	0.5651	0.5681	0.5710	0.5740	0.5769	0.5799
0.72		0.5828	0.5858	0.5888	0.5918	0.5948	0.5978	0.6008	0.6038	0.6068	0.6098
0.73		0.6128	0.6158	0.6189	0.6219	0.6250	0.6280	0.6311	0.6341	0.6372	0.6403
0.74		0.6433	0.6464	0.6495	0.6526	0.6557	0.6588	0.6620	0.6651	0.6682	0.6713
0.75		0.6745	0.6776	0.6808	0.6840	0.6871	0.6903	0.6935	0.6967	0.6999	0.7031
0.76		0.7063	0.7095	0.7128	0.7160	0.7192	0.7225	0.7257	0.7290	0.7323	0.7356
0.77		0.7388	0.7421	0.7454	0.7488	0.7521	0.7554	0.7588	0.7621	0.7655	0.7688
0.78		0.7722	0.7756	0.7790	0.7824	0.7858	0.7892	0.7926	0.7961	0.7995	0.8030
0.79		0.8064	0.8099	0.8134	0.8169	0.8204	0.8239	0.8274	0.8310	0.8345	0.8381
0.80		0.8416	0.8452	0.8488	0.8524	0.8560	0.8596	0.8633	0.8669	0.8705	0.8742
0.81		0.8779	0.8816	0.8853	0.8890	0.8927	0.8965	0.9002	0.9040	0.9078	0.9116
0.82		0.9154	0.9192	0.9230	0.9269	0.9307	0.9346	0.9385	0.9424	0.9463	0.9502
0.83		0.9542	0.9581	0.9620	0.9661	0.9701	0.9741	0.9782	0.9822	0.9863	0.9904
0.84		0.9945	0.9986	1.0027	1.0069	1.0110	1.0152	1.0194	1.0237	1.0279	1.0322
0.85		1.0364	1.0407	1.0450	1.0494	1.0537	1.0581	1.0625	1.0669	1.0714	1.0758
0.86		1.0803	1.0848	1.0893	1.0939	1.0985	1.1031	1.1077	1.1123	1.1170	1.1217

Lois usuelles

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



Remarque. Si $\alpha < 0.5$ alors utiliser $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$.

Document
C.2.2
Quantiles

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

D	
densité	8
E	
espérance	9
F	
fonction de répartition	7
fonction génératrice des moments ..	15
I	
inégalités	17
indépendance	10
Introduction.....	4
L	
loi de probabilité	6
lois usuelles.....	12
M	
moments, médiane.....	11

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

S

somme de deux v.a.r. **16**

V

variables aléatoires réelles **5**

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



Solution de l'exercice A.1.1

Nous allons nous contenter de traiter deux exemples.

$$X^{-1}(]a, b]) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in]a, b]\} =$$

$$\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in]-\infty, b]\} \cap \overline{\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in]-\infty, a]\}} = X^{-1}(] - \infty, b]) \cap \overline{X^{-1}(] - \infty, a])}$$

or d'après la proposition III.1.1, $X^{-1}(] - \infty, b])$ et $X^{-1}(] - \infty, a])$ sont dans \mathcal{F} et par les propriétés de stabilité des tribus on obtient :

$$X^{-1}(] - \infty, b]) \cap \overline{X^{-1}(] - \infty, a])} \in \mathcal{F}.$$

De même, pour $X^{-1}([a, b])$ on remarque que :

$$X^{-1}([a, b]) = \bigcap_{n \geq 1} X^{-1}(]a - 1/n, b])$$

or pour tout $n \geq 1$ $X^{-1}(]a - 1/n, b]) \in \mathcal{F}$ d'après ce qui est démontré ci-dessus et on sait que les tribus sont stables par intersection dénombrable (cf. chapitre 1). Par conséquent $X^{-1}([a, b]) \in \mathcal{F}$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.2

Dans ce cas on a $X(\Omega) = [0, 1]$. Alors :

$$\{X \in] - \infty, x]\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < 0, \\ [-\sqrt{x}, \sqrt{x}] & \text{si } x \in [0, 1], \\ \Omega & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Par conséquent on a :

$$p_X(] - \infty, x]) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0 & \text{si } x < 0, \\ P([-\sqrt{x}, \sqrt{x}]) = \frac{2\sqrt{x}}{2} = \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, 1], \\ P(\Omega) = 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.3

On a affaire à une probabilité géométrique :

$$F_R(r) = P(R \leq r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ \frac{\text{Aire}(D(O,r))}{\text{Aire}(D(O,\varrho))} = \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 & \text{si } r \in [0, \varrho[, \\ 1 & \text{si } r \geq \varrho. \end{cases}$$

L'utilisation des fonctions indicatrices permet d'écrire :

$$F_R(r) = (r/\varrho)^2 1_{[0,\varrho[}(r) + 1_{[\varrho,+\infty[}(r).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.4

F est bien une f.d.r. car elle est croissante, continue, de limite égale à 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

$$P(X \leq 0) = \int_{-\infty}^0 0 dx = 0,$$

$$P(X \geq s + t | X \geq s) = \frac{P(X \geq s + t)}{P(X \geq s)} = \frac{\exp(-s - t)}{\exp(-s)} = \exp(-t).$$

Cette dernière quantité étant égale à $P(X \geq t)$ on peut dire que la probabilité de vivre encore un temps t alors que l'on a déjà vécu un temps s est la même que la probabilité inconditionnelle de vivre un temps t . Ceci correspond à une propriété de perte de mémoire de la loi exponentielle.

Il est facile de voir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-y) 1_{[0, +\infty[}(y) dy.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.5

a- On a $f \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, d'où : $1 = k[2x - x^2/2]_0^1 = k3/2 \Rightarrow k = 2/3$.

b- On a :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2(2x - x^2/2)/3 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.6

$f \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \Rightarrow 2k/3 = 1$ soit $k = 3/2$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \int_{-1}^x 3y^2/2dy = \frac{x^3+1}{2} & \text{si } x \in [-1, 1[, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Enfin on a :

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{3}{2} \left(\frac{1 - (-1)^{k+3}}{k+3} \right)$$

et

$$\text{Var}(X) = \frac{3}{2} \left(\frac{1+1}{2+3} \right) = \frac{3}{5}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.7

On calcule la f.d.r. $F(x) = (1 - \exp(-\lambda x))1_{[0, +\infty[}(x)$ or F étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$ on trouve la médiane en résolvant $F(M) = 1/2$ soit $M = \ln(2)/\lambda$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.8

1. Comme $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ est de même loi que X et Y , elles ont toutes trois la même moyenne. Par conséquent on a $m = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow m = 2m/\sqrt{2} \Rightarrow m = 0$
2. Il suffit de remarquer que :

$$\frac{\frac{X_1+Y_1}{\sqrt{2}} + \frac{X_2+Y_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

où $\frac{X_1+Y_1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X_2+Y_2}{\sqrt{2}}$ sont de même loi que X ; en appliquant le résultat du a- à ces deux dernières v.a. on obtient le résultat attendu.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.9

a- Comme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X|) &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 + \int_1^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 + \left[-e^{-x^2/2} \right]_1^{+\infty} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + e^{-1/2}) < +\infty,\end{aligned}$$

la fonction impaire $x \rightarrow x e^{-x^2/2}$ est d'intégrale nulle sur \mathbb{R} . Donc $\mathbb{E}(X) = 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^{+\infty} x d(-e^{-x^2/2}) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\left[-x e^{-x^2/2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[0 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right] = 1.\end{aligned}$$

Donc $\text{Var}(x) = 1$.

b- On a :

$$P(Y \leq x) = P(\sigma X + \mu \leq x) = P\left(X \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

où Φ est la f.d.r. d'une loi normale centrée réduite.

Par conséquent :

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma} \Phi' \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right).$$

Enfin on a $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\sigma X + \mu) = \sigma \mathbb{E}(X) + \mu = \mu$ et $\text{Var}(Y) = \text{Var}(\sigma X + \mu) = \sigma^2 \text{Var}(X) = \sigma^2$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.10

D'après la proposition [III.3.2](#), une variable aléatoire de loi d'Erlang de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$ admet la même loi que la somme de n v.a.r. de loi $E(\lambda)$. Par conséquent sa moyenne (resp. variance) est égale à n fois celle d'une $E(\lambda)$, soit n/λ (resp. n/λ^2).

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.11

Soit X le point de coupe, alors X admet pour distribution une loi uniforme $U(-2k/L, 2k/L)$ de moyenne 0 (par symétrie) et de variance $(2k/L)^2/3 = 4k^2/(3L^2)$. Bien qu'en moyenne l'erreur commise est nulle, la tendance à s'écartier de cette moyenne augmente lorsque avec k !

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.12

a- Soit X_i ($i = 1, \dots, 4$) la durée de vie d'une ampoule. On a $X_i \sim N(180; 20^2)$ et :

$$\begin{aligned} P(X_1 \geq 200; X_2 \geq 200; X_3 \geq 200; X_4 \geq 200) &= P(X_1 \geq 200)^4 \\ &= P\left(\frac{X_1 - 180}{20} \geq \frac{200 - 180}{20}\right)^4 = (1 - \Phi(1))^4 \approx (0,1587)^4 \approx 0,0006. \end{aligned}$$

b- Soit $Y = X_1 + \dots + X_4$ le temps d'éclairage dont on dispose avec ces quatre ampoules. Alors, d'après la proposition III.3.1 on a $Y \sim N(4m; 4\sigma^2)$. D'où :

$$P(Y \geq 800) = P\left(\frac{Y - 720}{40} \geq \frac{800 - 720}{40}\right) = (1 - \Phi(2)) \approx 0,0228.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.13

D'après le tableau [III.1](#) la fonction génératrice $M(t)$ d'une $\gamma(\alpha, \beta)$ est donnée par :

$$\left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha .$$

Or puisque X et Y sont indépendantes on a :

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^\mu = \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^{\alpha+\mu} ,$$

ce qui est bien la fonction génératrice des moments d'une v.a.r. de loi $\gamma(\alpha + \mu, \beta)$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.14

On a :

$$F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

$$F_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(x-y)f_Y(y)dy = \int_0^1 F_X(x-y)dy$$

or

$$F_X(x-y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < y, \\ x-y & \text{si } x-1 \leq y \leq x, \\ 1 & \text{si } y \leq 1-x. \end{cases}$$

donc

$$F_{X+Y}(x) = \begin{cases} \int_0^1 0dy = 0 & \text{si } x < 0, \\ \int_0^x (x-y)dy = x^2/2 & \text{si } x \in [0, 1], \\ -x^2/2 + 2x - 1 & \text{si } x \in [1, 2], \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Pour les densités faire $f_{X+Y}(x) = \int_0^1 1_{[0,1]}(x-y)dy$. C'est un peu plus facile que pour les f.d.r. et on trouve :

$$f_{X+Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 2-x & \text{si } x \in [1, 2], \\ 0 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Le plus simple est de commencer par chercher la densité puis par faire le calcul d'intégration pour obtenir la f.d.r.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.15

$$\begin{aligned} P(X > x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-t^2/2) dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{t}{x} \exp(-t^2/2) dt \\ &\leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} [-\exp(-t^2/2)]_x^{+\infty} = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2). \end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.16

C'est une astuce classique qui consiste d'abord à écrire une probabilité comme l'espérance d'une fonction :

$$P(X \in]\alpha, \beta]) = \mathbb{E} (1_{] \alpha, \beta [}(X))$$

ensuite on constate que d'après les hypothèses la fonction $1_{] \alpha, \beta [}(x)$ est majorée par la fonction $g(x)/c$ sur \mathbb{R} ; ce qui donne en remplaçant dans l'espérance :

$$\mathbb{E} (1_{] \alpha, \beta [}(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{] \alpha, \beta [}(x) f_X(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{c} f_X(x) dx = \mathbb{E} \left(\frac{g(X)}{c} \right),$$

qui est le résultat attendu. C'est comme cela que l'on démontre l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev.

[Retour à l'exercice ▲](#)