I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Lire le paragraphe 7.1.5

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Lire le paragraphe 7.1.5

Conventions compatibles avec la relation de Chasles : $\boxed{\int_a^a f(t)\,dt = 0}$ et $\boxed{\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt}$

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Lire le paragraphe 7.1.5

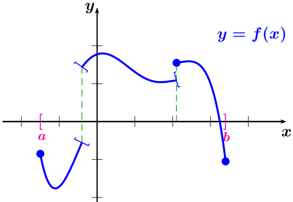
Conventions compatibles avec la relation de Chasles : $\boxed{\int_a^a f(t)\,dt = 0}$ et $\boxed{\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt}$

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (admis)

1. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.* ***Toute fonction continue sur*** $[a, b]$ ***est intégrable sur*** $[a, b]$.
2. ***Si*** f ***est bornée et continue par morceau sur*** $[a, b]$, *càd continue sauf en un nombre fini de points où elle admet une limite à droite et une limite à gauche,* ***alors*** f ***est intégrable sur*** $[a, b]$.

Exemple de fonction bornée continue par morceau :



I Définition de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt,\ a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem

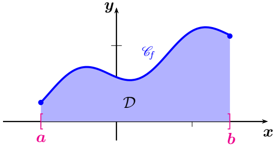
Si f est continue et positive sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = Aire(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est la partie délimitée par $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.

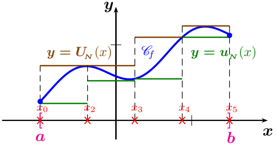
I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem

Si f est continue et positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{Aire}(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est la partie délimitée par $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.





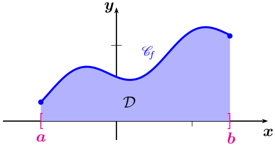
preuve : soit u et U deux fonctions étagées définies sur $[a,b]$ telles que $u \leqslant f$ et $f \leqslant U$.

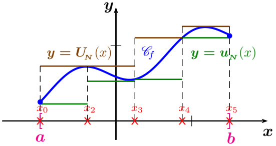
I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem

Si f est continue et positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt = Aire(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est la partie délimitée par $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.





preuve : soit u et U deux fonctions étagées définies sur $[a,b]$ telles que $u \leqslant f$ et $f \leqslant U$. Alors, par encadrement des aires,

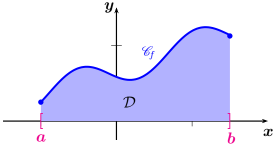
$$\alpha = \int_a^b u(t)\,dt \leqslant Aire(\mathcal{D}) \text{ et } Aire(\mathcal{D}) \leqslant \beta = \int_a^b U(t)\,dt.$$

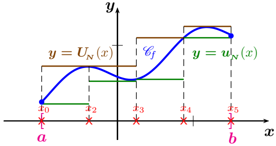
I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt,\ a,b\in\mathbb{R}.$

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem

Si f est continue et positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt = Aire(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est la partie délimitée par $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.





preuve : soit u et U deux fonctions étagées définies sur $[a,b]$ telles que $u \leqslant f$ et $f \leqslant U$. Alors, par encadrement des aires,

$$\alpha = \int_a^b u(t)\,dt \leqslant Aire(\mathcal{D}) \text{ et } Aire(\mathcal{D}) \leqslant \beta = \int_a^b U(t)\,dt.$$

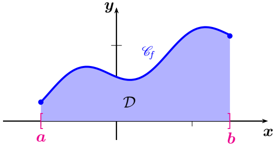
$\Rightarrow \quad Aire(\mathcal{D})$ est un majorant de A et un minorant de B.

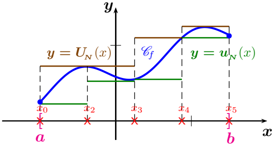
I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem

Si f est continue et positive sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt = Aire(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est la partie délimitée par $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.





preuve : soit u et U deux fonctions étagées définies sur $[a, b]$ telles que $u \leqslant f$ et $f \leqslant U$. Alors, par encadrement des aires,

$$\alpha = \int_a^b u(t)\,dt \leqslant Aire(\mathcal{D}) \text{ et } Aire(\mathcal{D}) \leqslant \beta = \int_a^b U(t)\,dt.$$

$\Rightarrow \quad Aire(\mathcal{D})$ est un majorant de A et un minorant de B.

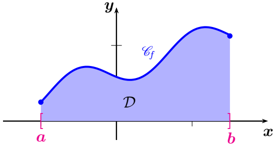
Comme f est intégrable $\sup A$ et $\inf B$ existent.

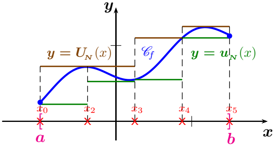
I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt,\ a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem

Si f est continue et positive sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = Aire(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est la partie délimitée par $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.





preuve : soit u et U deux fonctions étagées définies sur $[a, b]$ telles que $u \leqslant f$ et $f \leqslant U$. Alors, par encadrement des aires,

$$\alpha = \int_a^b u(t)\,dt \leqslant Aire(\mathcal{D}) \text{ et } Aire(\mathcal{D}) \leqslant \beta = \int_a^b U(t)\,dt.$$

$\Rightarrow \quad Aire(\mathcal{D})$ est un majorant de A et un minorant de B.

Comme f est intégrable $\sup A$ et $\inf B$ existent.
Par définition du sup et de l'inf, on a

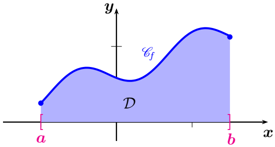
$$\sup A \leqslant Aire(\mathcal{D}) \text{ et } \inf B \geqslant Aire(\mathcal{D}).$$

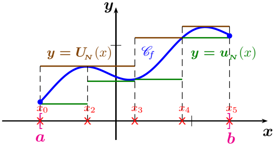
I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem

Si f est continue et positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt = Aire(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est la partie délimitée par $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.





preuve : soit u et U deux fonctions étagées définies sur $[a,b]$ telles que $u \leqslant f$ et $f \leqslant U$. Alors, par encadrement des aires,

$$\alpha = \int_a^b u(t)\,dt \leqslant Aire(\mathcal{D}) \text{ et } Aire(\mathcal{D}) \leqslant \beta = \int_a^b U(t)\,dt.$$

$\Rightarrow \quad Aire(\mathcal{D})$ est un majorant de A et un minorant de B.

Comme f est intégrable $\sup A$ et $\inf B$ existent.
Par définition du sup et de l'inf, on a

$$\sup A \leqslant Aire(\mathcal{D}) \text{ et } \inf B \geqslant Aire(\mathcal{D}).$$

Il vient, $Aire(\mathcal{D}) \leqslant \inf B = \int_a^b f(t)dt = \sup A \leqslant Aire(\mathcal{D})$.

D'où l'égalité.

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. On dit que F est la primitive de f qui s'annule en a.

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. On dit que F est la primitive de f qui s'annule en a.

NB : f continue $\Rightarrow$ F est de classe $\mathscr{C}^1$.

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt,\ a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. On dit que F est la primitive de f qui s'annule en a.

NB : f continue $\Rightarrow F$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

preuve : On étudie le taux d'accroissement de F en chaque point $x \in I$.

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt,\ a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. On dit que F est la primitive de f qui s'annule en a.

NB : f continue $\Rightarrow F$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

preuve : On étudie le taux d'accroissement de F en chaque point $x \in I$.

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt$$

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. On dit que F est la primitive de f qui s'annule en a.

NB : f continue $\Rightarrow$ F est de classe $\mathscr{C}^1$.

preuve : On étudie le taux d'accroissement de F en chaque point $x \in I$.

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. On dit que F est la primitive de f qui s'annule en a.

NB : f continue $\Rightarrow$ F est de classe $\mathscr{C}^1$.

preuve : On étudie le taux d'accroissement de F en chaque point $x \in I$.

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt,\ a,b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. On dit que F est la primitive de f qui s'annule en a.

NB : f continue $\Rightarrow$ F est de classe $\mathscr{C}^1$.

preuve : On étudie le taux d'accroissement de F en chaque point $x \in I$.

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \Rightarrow \boxed{\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt}$$

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt,\ a,b \in \mathbb{R}$.

C Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. On dit que F est la primitive de f qui s'annule en a.

NB : f continue $\Rightarrow$ F est de classe $\mathscr{C}^1$.

preuve : On étudie le taux d'accroissement de F en chaque point $x \in I$.

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \Rightarrow \boxed{\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt}$$

(h>0). Comme f est continue sur $[x, x+h] \subset I$, il existe $(c_1, c_2) \in [x, x+h]^2$ tels que $f([x, x+h]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt,\ a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. On dit que F est la primitive de f qui s'annule en a.

NB : f continue $\Rightarrow F$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

preuve : On étudie le taux d'accroissement de F en chaque point $x \in I$.

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \Rightarrow \boxed{\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt}$$

(h>0). Comme f est continue sur $[x, x+h] \subset I$, il existe $(c_1, c_2) \in [x, x+h]^2$ tels que $f([x, x+h]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

$$\forall\, t \in [x, x+h],\ f(c_1) \leqslant f(t) \leqslant f(c_2)$$

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt,\ a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. On dit que F est la primitive de f qui s'annule en a.

NB : f continue $\Rightarrow$ F est de classe $\mathscr{C}^1$.

preuve : On étudie le taux d'accroissement de F en chaque point $x \in I$.

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \Rightarrow \boxed{\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt}$$

(h>0). Comme f est continue sur $[x, x+h] \subset I$, il existe $(c_1, c_2) \in [x, x+h]^2$ tels que $f([x, x+h]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

$$\forall\, t \in [x, x+h],\ f(c_1) \leqslant f(t) \leqslant f(c_2) \quad \Rightarrow \int_x^{x+h} f(c_1)dt = hf(c_1) \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant \int_x^{x+h} f(c_2)dt = hf(c_2)$$

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt,\ a,b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. On dit que F est la primitive de f qui s'annule en a.

NB : f continue $\Rightarrow$ F est de classe $\mathscr{C}^1$.

preuve : On étudie le taux d'accroissement de F en chaque point $x \in I$.

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \Rightarrow \boxed{\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt}$$

(h>0). Comme f est continue sur $[x, x+h] \subset I$, il existe $(c_1, c_2) \in [x, x+h]^2$ tels que $f([x, x+h]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

$$\forall\, t \in [x, x+h],\ f(c_1) \leqslant f(t) \leqslant f(c_2) \quad \Rightarrow \int_x^{x+h} f(c_1)dt = hf(c_1) \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant \int_x^{x+h} f(c_2)dt = hf(c_2)$$

D'où $\boxed{f(c_1) \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant f(c_2)}$.

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt,\ a,b\in\mathbb{R}$.

C Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a\in I$. On définit $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x\in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x\in I,\ F'(x)=f(x)$. On dit que F est la primitive de f qui s'annule en a.

NB : f continue $\Rightarrow$ F est de classe $\mathscr{C}^1$.

preuve : On étudie le taux d'accroissement de F en chaque point $x\in I$.

$$F(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+h} f(t)\,dt=F(x)+\int_x^{x+h} f(t)\,dt\Rightarrow \boxed{\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt}$$

(h>0). Comme f est continue sur $[x,x+h]\subset I$, il existe $(c_1,c_2)\in[x,x+h]^2$ tels que $f([x,x+h])=[f(c_1),f(c_2)]$.

$$\forall\, t\in[x,x+h],\ f(c_1)\leqslant f(t)\leqslant f(c_2)\quad\Rightarrow\int_x^{x+h} f(c_1)dt=hf(c_1)\leqslant\int_x^{x+h} f(t)\,dt\leqslant\int_x^{x+h} f(c_2)dt=hf(c_2)$$

D'où $\boxed{f(c_1)\leqslant\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\leqslant f(c_2)}$. Or $c_1\underset{h\to0+}{\longrightarrow}x$, $c_2\underset{h\to0+}{\longrightarrow}x$ et f est continue.

Par composition de limite, on a $f(c_1)\underset{h\to0+}{\longrightarrow}f(x)$ et $f(c_2)\underset{h\to0+}{\longrightarrow}f(x)$.

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt,\ a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. On dit que F est la primitive de f qui s'annule en a.

NB : f continue $\Rightarrow$ F est de classe $\mathscr{C}^1$.

preuve : On étudie le taux d'accroissement de F en chaque point $x \in I$.

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \Rightarrow \boxed{\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt}$$

(h>0). Comme f est continue sur $[x, x+h] \subset I$, il existe $(c_1, c_2) \in [x, x+h]^2$ tels que $f([x, x+h]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

$$\forall\, t \in [x, x+h],\ f(c_1) \leqslant f(t) \leqslant f(c_2) \quad \Rightarrow \int_x^{x+h} f(c_1)dt = hf(c_1) \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant \int_x^{x+h} f(c_2)dt = hf(c_2)$$

D'où $\boxed{f(c_1) \leqslant \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant f(c_2)}$. Or $c_1 \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} x$, $c_2 \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} x$ et f est continue.

Par composition de limite, on a $f(c_1) \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} f(x)$ et $f(c_2) \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} f(x)$. Donc, $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. On dit que F est la primitive de f qui s'annule en a.

NB : f continue $\Rightarrow F$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

preuve : On étudie le taux d'accroissement de F en chaque point $x \in I$.

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \Rightarrow \boxed{\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt}$$

(h>0). Comme f est continue sur $[x, x+h] \subset I$, il existe $(c_1, c_2) \in [x, x+h]^2$ tels que $f([x, x+h]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

$$\forall\, t \in [x, x+h],\ f(c_1) \leqslant f(t) \leqslant f(c_2) \quad \Rightarrow \int_x^{x+h} f(c_1)dt = hf(c_1) \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant \int_x^{x+h} f(c_2)dt = hf(c_2)$$

D'où $\boxed{f(c_1) \leqslant \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant f(c_2)}$. Or $c_1 \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} x$, $c_2 \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} x$ et f est continue.

Par composition de limite, on a $f(c_1) \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} f(x)$ et $f(c_2) \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} f(x)$. Donc, $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

(h<0). Seules les inégalités en bleu sont inversées. On obtient aussi $\lim\limits_{h\to 0-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$. D'où $F'(x) = f(x)$

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Corollary (forme générale des primitives)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives. *Étant donnée une primitive particulière F de f, la forme générale des primitives est $G(x) := \int f(x)\,dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.*
Deux primitives de f définies sur le même intervalle I diffèrent d'une constante.

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt,\ a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Corollary (forme générale des primitives)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives. *Étant donnée une primitive particulière F de f, la forme générale des primitives est $G(x) := \int f(x)\,dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.*
Deux primitives de f définies sur le même intervalle I diffèrent d'une constante.

preuve : On pose $H(x) = G(x) - F(x)$ sur I. On a $\forall\, x \in I,\ \ H'(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc H est constante sur I.

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt,\ a,b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Corollary (forme générale des primitives)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives. *Étant donnée une primitive particulière F de f, la forme générale des primitives est $G(x) := \int f(x)\,dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.*
Deux primitives de f définies sur le même intervalle I diffèrent d'une constante.

preuve : On pose $H(x) = G(x) - F(x)$ sur I. On a $\forall\, x \in I,\ H'(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc H est constante sur I.

Calcul intégral : Soit $(a,b) \in I^2$. Connaissant G une primitive de f définie sur I, en pratique, on effectue le calcul intégral en écrivant

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a).$$

I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt,\ a,b\in\mathbb{R}$.

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Corollary (forme générale des primitives)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives. *Étant donnée une primitive particulière F de f, la forme générale des primitives est $G(x) := \int f(x)\,dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.*
Deux primitives de f définies sur le même intervalle I diffèrent d'une constante.

preuve : On pose $H(x) = G(x) - F(x)$ sur I. On a $\forall\, x \in I,\ H'(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc H est constante sur I.

Calcul intégral : Soit $(a,b) \in I^2$. Connaissant G une primitive de f définie sur I, en pratique, on effectue le calcul intégral en écrivant

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a).$$

⚠ **Ne pas confondre :** le réel $\int_a^b f(t)\,dt$, appelé intégrale de f sur $[a,b]$, avec la fonction $\int f(x)\,dx$, appelée forme générale des primitives de f.

II Propriétés des intégrales.

Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $\forall\, x \in [a,b],\ f(x) \geqslant 0$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in [a,b],\ f(x) = 0.$

II Propriétés des intégrales.

Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $\forall\, x \in [a, b],\ f(x) \geqslant 0$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in [a, b],\ f(x) = 0.$

preuve : On pose pour $x \in [a, b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

II Propriétés des intégrales.

Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $\forall\, x \in [a, b],\ f(x) \geqslant 0.$

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in [a, b],\ f(x) = 0.$

preuve : On pose pour $x \in [a, b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.

On sait que $\forall\, x \in]a, b[,\ F'(x) = f(x) \geqslant 0$

II Propriétés des intégrales.

Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $\forall\, x \in [a, b],\ f(x) \geqslant 0.$

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in [a, b],\ f(x) = 0.$

preuve : On pose pour $x \in [a, b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt.$

On sait que $\forall\, x \in]a, b[,\ F'(x) = f(x) \geqslant 0 \Rightarrow F$ est croissante sur $[a, b]$.

II Propriétés des intégrales.

Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $\forall x \in [a, b],\ f(x) \geqslant 0$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in [a, b],\ f(x) = 0.$

preuve : On pose pour $x \in [a, b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

On sait que $\forall x \in]a, b[,\ F'(x) = f(x) \geqslant 0 \Rightarrow F$ est croissante sur $[a, b]$.

Par conséquent,

$$\forall x \in [a, b], \quad F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(b)\ .$$

II Propriétés des intégrales.

Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $\forall\, x \in [a, b],\ f(x) \geqslant 0$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in [a, b],\ f(x) = 0.$

preuve : On pose pour $x \in [a, b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

On sait que $\forall\, x \in]a, b[,\ F'(x) = f(x) \geqslant 0 \Rightarrow F$ est croissante sur $[a, b]$.

Par conséquent,

$$\forall\, x \in [a, b], \quad F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(b)\ .$$

Or,

$$\int_a^b f(t)\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad F(b) - F(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(b) = F(a) \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in [a, b], F(x) = F(a)\ .$$

II Propriétés des intégrales.

Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $\forall\, x \in [a, b],\ f(x) \geqslant 0$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in [a, b],\ f(x) = 0.$

preuve : On pose pour $x \in [a, b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.

On sait que $\forall\, x \in\,]a, b[,\ F'(x) = f(x) \geqslant 0 \Rightarrow F$ est croissante sur $[a, b]$.

Par conséquent,

$$\forall\, x \in [a, b], \quad F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(b)\ .$$

Or,

$$\int_a^b f(t)\, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad F(b) - F(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(b) = F(a) \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in [a, b], F(x) = F(a)\ .$$

La fonction F étant constante sur $[a, b]$, on a

$$\forall\, x \in\,]a, b[,\ F'(x) = f(x) = 0 \underset{\text{par continuité de } f}{\Rightarrow} \forall\, x \in [a, b],\ f(x) = 0.$$

II Propriétés des intégrales.

Definition (valeur moyenne de f)

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, $a < b$.

La nombre $\boxed{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt}$ est appelé **moyenne de f sur $[a, b]$**.

II Propriétés des intégrales.

Definition (valeur moyenne de f)

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, $a < b$.

La nombre $\boxed{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt}$ est appelé **moyenne de f sur $[a, b]$**.

Theorem (1er théorème de la moyenne)

Si f est continue sur $[a, b]$, $a < b$, alors $\exists\, c \in]a, b[$, $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = f(c)$

II Propriétés des intégrales.

Definition (valeur moyenne de f)

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, $a < b$.

La nombre $\boxed{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt}$ est appelé **moyenne de f sur $[a, b]$**.

Theorem (1^{er} théorème de la moyenne)

Si f est continue sur $[a, b]$, $a < b$, alors $\exists\, c \in]a, b[$, $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = f(c)$

preuve : On pose pour $x \in [a, b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

II Propriétés des intégrales.

Definition (valeur moyenne de f)

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, $a < b$.

La nombre $\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt}$ est appelé **moyenne de f sur $[a, b]$**.

Theorem (1er théorème de la moyenne)

Si f est continue sur $[a, b]$, $a < b$, alors $\exists\, c \in]a, b[$, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = f(c)$

preuve : On pose pour $x \in [a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

La fonction F est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $F'(x) = f(x)$.

II Propriétés des intégrales.

Definition (valeur moyenne de f)

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, $a<b$.

La nombre $\boxed{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt}$ est appelé **moyenne de f sur $[a,b]$**.

Theorem (1er théorème de la moyenne)

Si f est continue sur $[a,b]$, $a<b$, alors $\exists\, c\in]a,b[,\ \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = f(c)$

preuve : On pose pour $x\in[a,b]$, $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

La fonction F est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $F'(x)=f(x)$.
D'après le T.A.F, on sait qu'

$$\exists\, c\in]a,b[\,,\ F(b)-F(a)=F'(c)(b-a).$$

II Propriétés des intégrales.

Definition (valeur moyenne de f)

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, $a<b$.

La nombre $\boxed{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt}$ est appelé **moyenne de f sur $[a,b]$**.

Theorem (1^er^ théorème de la moyenne)

Si f est continue sur $[a,b]$, $a<b$, alors $\exists\, c \in]a,b[,\ \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = f(c)$

preuve : On pose pour $x \in [a,b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

La fonction F est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $F'(x) = f(x)$.
D'après le T.A.F, on sait qu'

$$\exists\, c \in]a,b[\,,\ F(b)-F(a) = F'(c)(b-a).$$

Autrement dit,

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a)$$

II Propriétés des intégrales.

Theorem (2nd théorème de la moyenne)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si g garde un signe constant sur $[a,b]$ alors

$$\exists\, c \in]a,b[, \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

II Propriétés des intégrales.

Theorem (2^{nd} théorème de la moyenne)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si g garde un signe constant sur $[a,b]$ alors

$$\exists\, c \in \,]a,b[,\ \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

preuve dans le cas $g \geqslant 0$ **:**

II Propriétés des intégrales.

Theorem (2nd théorème de la moyenne)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si g garde un signe constant sur $[a,b]$ alors

$$\exists\, c \in \left]a,b\right[,\ \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

preuve dans le cas $g \geqslant 0$: On distingue deux cas.

II Propriétés des intégrales.

Theorem (2^{nd} théorème de la moyenne)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si g garde un signe constant sur $[a,b]$ alors

$$\exists\, c \in \,]a,b[, \quad \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

preuve dans le cas $g \geqslant 0$: On distingue deux cas.

1. Soit $\forall\, x \in [a,b],\ g(x) = 0.$

II Propriétés des intégrales.

Theorem (2nd théorème de la moyenne)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si g garde un signe constant sur $[a,b]$ alors

$$\exists\, c \in\,]a,b[,\ \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

preuve dans le cas $g \geqslant 0$: On distingue deux cas.

1. Soit $\forall\, x \in [a,b],\ g(x) = 0$. Alors $\forall\, c \in [a,b],\ \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0 = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$. (Intégrants nuls !)

II Propriétés des intégrales.

Theorem (2nd théorème de la moyenne)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si g garde un signe constant sur $[a,b]$ alors

$$\exists\, c \in]a,b[, \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

preuve dans le cas $g \geqslant 0$: On distingue deux cas.

1. Soit $\forall\, x \in [a,b],\ g(x) = 0$. Alors $\forall\, c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0 = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$. (Intégrants nuls !)
2. Soit $\exists\, x \in [a,b],\ g(x) \neq 0$.

II Propriétés des intégrales.

Theorem (2nd théorème de la moyenne)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si g garde un signe constant sur $[a,b]$ alors

$$\exists\, c \in\,]a,b[,\ \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

preuve dans le cas $g \geqslant 0$: On distingue deux cas.

1. Soit $\forall\, x \in [a,b],\ g(x) = 0$. Alors $\forall\, c \in [a,b],\ \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0 = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$. (Intégrants nuls !)
2. Soit $\exists\, x \in [a,b],\ g(x) \neq 0$. Par contraposée de la proposition page 5, on en déduit $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \neq 0$.

II Propriétés des intégrales.

Theorem (2nd théorème de la moyenne)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si g garde un signe constant sur $[a,b]$ alors

$$\exists\, c \in \,]a,b[,\ \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

preuve dans le cas $g \geqslant 0$: On distingue deux cas.

1. Soit $\forall\, x \in [a,b],\ g(x) = 0$. Alors $\forall\, c \in [a,b],\ \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0 = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$. (Intégrants nuls !)
2. Soit $\exists\, x \in [a,b],\ g(x) \neq 0$. Par contraposée de la proposition page 5, on en déduit $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \neq 0$. La fonction f étant continue sur $[a,b]$, il existe $(c_1,c_2) \in [a,b]^2$ tels que $f([a,b]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

II Propriétés des intégrales.

Theorem (2nd théorème de la moyenne)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si g garde un signe constant sur $[a,b]$ alors

$$\exists\, c \in]a,b[,\ \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

preuve dans le cas $g \geqslant 0$: On distingue deux cas.

1. Soit $\forall\, x \in [a,b],\ g(x) = 0$. Alors $\forall\, c \in [a,b],\ \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0 = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$. (Intégrants nuls !)
2. Soit $\exists\, x \in [a,b],\ g(x) \neq 0$. Par contraposée de la proposition page 5, on en déduit $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \neq 0$. La fonction f étant continue sur $[a,b]$, il existe $(c_1,c_2) \in [a,b]^2$ tels que $f([a,b]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

   $$\forall\, t \in [a,b],\ f(c_1) \leqslant f(t) \leqslant f(c_2)$$

II Propriétés des intégrales.

Theorem (2$^{\text{nd}}$ théorème de la moyenne)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si g garde un signe constant sur $[a,b]$ alors

$$\exists\, c \in]a,b[,\ \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

preuve dans le cas $g \geqslant 0$: On distingue deux cas.

1. Soit $\forall\, x \in [a,b],\ g(x) = 0$. Alors $\forall\, c \in [a,b],\ \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0 = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$. (Intégrants nuls !)
2. Soit $\exists\, x \in [a,b],\ g(x) \neq 0$. Par contraposée de la proposition page 5, on en déduit $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \neq 0$. La fonction f étant continue sur $[a,b]$, il existe $(c_1,c_2) \in [a,b]^2$ tels que $f([a,b]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

$$\forall\, t \in [a,b],\ f(c_1) \leqslant f(t) \leqslant f(c_2) \Rightarrow \forall\, t \in [a,b],\ f(c_1)g(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant f(c_2)g(t)$$

II Propriétés des intégrales.

Theorem (2nd théorème de la moyenne)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Si g garde un signe constant sur $[a, b]$ alors

$$\exists\, c \in]a, b[, \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

preuve dans le cas $g \geqslant 0$: On distingue deux cas.

1. Soit $\forall\, x \in [a, b],\ g(x) = 0$. Alors $\forall\, c \in [a, b], \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0 = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$. (Intégrants nuls !)
2. Soit $\exists\, x \in [a, b],\ g(x) \neq 0$. Par contraposée de la proposition page 5, on en déduit $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \neq 0$. La fonction f étant continue sur $[a, b]$, il existe $(c_1, c_2) \in [a, b]^2$ tels que $f([a, b]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

$$\forall\, t \in [a, b],\ f(c_1) \leqslant f(t) \leqslant f(c_2) \Rightarrow \forall\, t \in [a, b],\ f(c_1)g(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant f(c_2)g(t)$$

$$\Rightarrow f(c_1)\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant f(c_2)\int_a^b g(t)\,dt$$

II Propriétés des intégrales.

Theorem (2^{nd} théorème de la moyenne)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si g garde un signe constant sur $[a,b]$ alors

$$\exists\, c \in]a,b[,\ \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

preuve dans le cas $g \geqslant 0$: On distingue deux cas.

1. Soit $\forall\, x \in [a,b],\ g(x) = 0$. Alors $\forall\, c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0 = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$. (Intégrants nuls !)
2. Soit $\exists\, x \in [a,b],\ g(x) \neq 0$. Par contraposée de la proposition page 5, on en déduit $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \neq 0$. La fonction f étant continue sur $[a,b]$, il existe $(c_1,c_2) \in [a,b]^2$ tels que $f([a,b]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

$$\forall\, t \in [a,b],\ f(c_1) \leqslant f(t) \leqslant f(c_2) \Rightarrow \forall\, t \in [a,b],\ f(c_1)g(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant f(c_2)g(t)$$
$$\Rightarrow f(c_1)\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant f(c_2)\int_a^b g(t)\,dt$$
$$\Rightarrow f(c_1) \leqslant \left.\int_a^b f(t)g(t)\,dt \middle/ \int_a^b g(t)\,dt\right. \leqslant f(c_2)$$

II Propriétés des intégrales.

Theorem (2nd théorème de la moyenne)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Si g garde un signe constant sur $[a, b]$ alors

$$\exists\, c \in]a, b[, \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

preuve dans le cas $g \geqslant 0$: On distingue deux cas.

1. Soit $\forall\, x \in [a, b],\ g(x) = 0$. Alors $\forall\, c \in [a, b], \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0 = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$. (Intégrants nuls !)
2. Soit $\exists\, x \in [a, b],\ g(x) \neq 0$. Par contraposée de la proposition page 5, on en déduit $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \neq 0$. La fonction f étant continue sur $[a, b]$, il existe $(c_1, c_2) \in [a, b]^2$ tels que $f([a, b]) = [f(c_1), f(c_2)]$.

$$\forall\, t \in [a, b],\ f(c_1) \leqslant f(t) \leqslant f(c_2) \Rightarrow \forall\, t \in [a, b],\ f(c_1)g(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant f(c_2)g(t)$$
$$\Rightarrow f(c_1)\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant f(c_2)\int_a^b g(t)\,dt$$
$$\Rightarrow f(c_1) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \Big/ \int_a^b g(t)\,dt \leqslant f(c_2)$$

D'après le T.V.I, $\exists\, c \in [c_1, c_2] \subset [a, b]$ ou $(c \in [c_2, c_1])$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt \Big/ \int_a^b g(t)\,dt = f(c) \Leftrightarrow \cdots$

$\boxed{\text{En fait } c \in]a, b[}$

II Propriétés des intégrales.

Theorem (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $\boxed{a \leqslant b}$ *et f et g deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$ *alors*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt\right)\left(\int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt\right)$$

preuve : • si $a = b$, les intégrales sont nulles donc l'inégalité est une égalité.

II Propriétés des intégrales.

Theorem (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $\boxed{a \leqslant b}$ *et f et g deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$ *alors*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2 dt\right)$$

preuve : • si $a = b$, les intégrales sont nulles donc l'inégalité est une égalité.
• On suppose $a < b$

1. $\displaystyle\int_a^b (g(t))^2 dt = 0$

II Propriétés des intégrales.

Theorem (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $\boxed{a \leqslant b}$ *et f et g deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$ *alors*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2 dt\right)$$

preuve : • si $a = b$, les intégrales sont nulles donc l'inégalité est une égalité.
• On suppose $a < b$

1. $\int_a^b (g(t))^2 dt = 0 \Rightarrow g$ est nulle presque partout

II Propriétés des intégrales.

Theorem (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $\boxed{a \leqslant b}$ *et f et g deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$ *alors*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2 dt\right)$$

preuve : • si $a = b$, les intégrales sont nulles donc l'inégalité est une égalité.
• On suppose $a < b$

1. $\int_a^b (g(t))^2 dt = 0 \Rightarrow g$ est nulle presque partout $\Rightarrow fg$ est nulle p.p.

II Propriétés des intégrales.

Theorem (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $\boxed{a \leqslant b}$ *et f et g deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$ *alors*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2 dt\right)$$

preuve : • si $a = b$, les intégrales sont nulles donc l'inégalité est une égalité.
• On suppose $a < b$

1. $\int_a^b (g(t))^2 dt = 0 \Rightarrow g$ est nulle presque partout $\Rightarrow fg$ est nulle p.p. $\Rightarrow \int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$
   L'inégalité est donc une égalité.

II Propriétés des intégrales.

Theorem (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $\boxed{a \leqslant b}$ *et f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ alors*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2 dt\right)$$

preuve : • si $a = b$, les intégrales sont nulles donc l'inégalité est une égalité.
• On suppose $a < b$

1. $\displaystyle\int_a^b (g(t))^2 dt = 0 \Rightarrow g$ est nulle presque partout $\Rightarrow fg$ est nulle p.p. $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$
   L'inégalité est donc une égalité.
2. On suppose que $\displaystyle\int_a^b (g(t))^2 dt > 0$.

II Propriétés des intégrales.

Theorem (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $\boxed{a \leqslant b}$ *et f et g deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$ *alors*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b \big(f(t)\big)^2 dt\right)\left(\int_a^b \big(g(t)\big)^2 dt\right)$$

preuve : • si $a = b$, les intégrales sont nulles donc l'inégalité est une égalité.
• On suppose $a < b$

1. $\displaystyle\int_a^b \big(g(t)\big)^2 dt = 0 \Rightarrow g$ est nulle presque partout $\Rightarrow fg$ est nulle p.p. $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$
L'inégalité est donc une égalité.
2. On suppose que $\displaystyle\int_a^b \big(g(t)\big)^2 dt > 0$. On définit le polynôme $P(\lambda) = \displaystyle\int_a^b \big(f(t) + \lambda g(t)\big)^2 dt$.

II Propriétés des intégrales.

Theorem (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $\boxed{a \leqslant b}$ *et f et g deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$ *alors*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b \big(f(t)\big)^2 dt\right)\left(\int_a^b \big(g(t)\big)^2 dt\right)$$

preuve : • si $a = b$, les intégrales sont nulles donc l'inégalité est une égalité.
• On suppose $a < b$

1. $\displaystyle\int_a^b \big(g(t)\big)^2 dt = 0 \Rightarrow g$ est nulle presque partout $\Rightarrow fg$ est nulle p.p. $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$
   L'inégalité est donc une égalité.
2. On suppose que $\displaystyle\int_a^b \big(g(t)\big)^2 dt > 0$. On définit le polynôme $P(\lambda) = \displaystyle\int_a^b \big(f(t) + \lambda g(t)\big)^2 dt$.
   On sait que $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \ P(\lambda) \geqslant 0$

II Propriétés des intégrales.

Theorem (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $\boxed{a \leqslant b}$ *et f et g deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$ *alors*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b \big(f(t)\big)^2 dt\right)\left(\int_a^b \big(g(t)\big)^2 dt\right)$$

preuve : • si $a = b$, les intégrales sont nulles donc l'inégalité est une égalité.
• On suppose $a < b$

1. $\displaystyle\int_a^b \big(g(t)\big)^2 dt = 0 \Rightarrow g$ est nulle presque partout $\Rightarrow fg$ est nulle p.p. $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$
   L'inégalité est donc une égalité.
2. On suppose que $\displaystyle\int_a^b \big(g(t)\big)^2 dt > 0$. On définit le polynôme $P(\lambda) = \displaystyle\int_a^b \big(f(t) + \lambda g(t)\big)^2 dt$.
   On sait que $\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \ P(\lambda) \geqslant 0$ et on développe l'expression :
   $$P(\lambda) = \int_a^b \left[\big(f(t)\big)^2 + 2\lambda f(t)g(t) + \lambda^2\big(g(t)\big)^2\right] dt$$

II Propriétés des intégrales.

Theorem (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $\boxed{a \leqslant b}$ *et f et g deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$ *alors*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2 dt\right)$$

preuve : • si $a = b$, les intégrales sont nulles donc l'inégalité est une égalité.
• On suppose $a < b$

1. $\displaystyle\int_a^b (g(t))^2 dt = 0 \Rightarrow g$ est nulle presque partout $\Rightarrow fg$ est nulle p.p. $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$
   L'inégalité est donc une égalité.

2. On suppose que $\displaystyle\int_a^b (g(t))^2 dt > 0$. On définit le polynôme $P(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 dt$.
   On sait que $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) \geqslant 0$ et on développe l'expression :

$$P(\lambda) = \int_a^b \left[(f(t))^2 + 2\lambda f(t)g(t) + \lambda^2 (g(t))^2\right] dt$$
$$= \lambda^2 \int_a^b (g(t))^2 dt + 2\lambda \int_a^b f(t)g(t)\,dt + \int_a^b (f(t))^2 dt$$

II Propriétés des intégrales.

Theorem (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $\boxed{a \leqslant b}$ *et* f *et* g *deux fonctions intégrables sur* $[a,b]$ *alors*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt\right)\left(\int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt\right)$$

preuve : • si $a = b$, les intégrales sont nulles donc l'inégalité est une égalité.
• On suppose $a < b$

1. $\displaystyle\int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt = 0 \Rightarrow g$ est nulle presque partout $\Rightarrow fg$ est nulle p.p. $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$
   L'inégalité est donc une égalité.
2. On suppose que $\displaystyle\int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt > 0$. On définit le polynôme $P(\lambda) = \displaystyle\int_a^b \left(f(t) + \lambda g(t)\right)^2 dt$.
   On sait que $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \ P(\lambda) \geqslant 0$ et on développe l'expression :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \int_a^b \left[\left(f(t)\right)^2 + 2\lambda f(t)g(t) + \lambda^2\left(g(t)\right)^2\right] dt \\ &= \lambda^2 \int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt + 2\lambda \int_a^b f(t)g(t)\,dt + \int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt \end{aligned}$$

   P est de signe constant $\Leftrightarrow \Delta \leqslant 0$

II Propriétés des intégrales.

Theorem (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $\boxed{a \leqslant b}$ *et f et g deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$ *alors*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt\right)\left(\int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt\right)$$

preuve : • si $a = b$, les intégrales sont nulles donc l'inégalité est une égalité.
• On suppose $a < b$

1. $\displaystyle\int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt = 0 \Rightarrow g$ est nulle presque partout $\Rightarrow fg$ est nulle p.p. $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$
   L'inégalité est donc une égalité.

2. On suppose que $\displaystyle\int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt > 0$. On définit le polynôme $P(\lambda) = \displaystyle\int_a^b \left(f(t) + \lambda g(t)\right)^2 dt$.
   On sait que $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \ P(\lambda) \geqslant 0$ et on développe l'expression :
   $$\begin{aligned} P(\lambda) &= \int_a^b \left[\left(f(t)\right)^2 + 2\lambda f(t)g(t) + \lambda^2\left(g(t)\right)^2\right] dt \\ &= \lambda^2 \int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt + 2\lambda \int_a^b f(t)g(t)\,dt + \int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt \end{aligned}$$
   P est de signe constant $\Leftrightarrow \Delta \leqslant 0 \Leftrightarrow \left(2\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 - 4\left(\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt\right)\left(\int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow \cdots$