Chapitre 1. Corrigés des exercices.

Exercice A.2.1 : Réécrire ces phrases avec quantificateurs avant d'écrire la négation.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 2$ ou $g(x) \neq 0$.

2. $\exists n \in \mathbb{Z},\ n > 0$ et $n \leq 0$.

3. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \leq 1$.

4. $(\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \neq 1)$ ou $\big(\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \neq x_2$ et $e^{x_1} = 1 = e^{x_2}\big)$.

5. $x \geq 0$ et $\sqrt{x}$ n'existe pas.

6. $n \in \mathbb{N}^*$ et $n^3 - n$ n'est pas un multiple de 3.

Exercice A.2.2 :

1. La première implication est vraie. D'après la table de vérité du connecteur "$\Rightarrow$", si P est toujours fausse dans $P \Rightarrow Q$ alors l'implication est vraie.

2. On peut écrire la contraposée et raisonner comme au **1.**.
Ou bien on se réfère à la table de vérité du connecteur "$\Rightarrow$" : si Q est toujours vraie dans $P \Rightarrow Q$ alors l'implication est vraie.

Exercice A.2.3 : On doit chercher le seul sous-ensemble A de E pour lequel l'implication suivante est fausse

$$\forall x \in A,\ P(x) \quad \Rightarrow \quad \exists x \in A,\ P(x).$$

Cela signifie que nous devons chercher $A \subset E$ pour lequel la négation de cette implication est vraie :

$$(\forall x \in A,\ P(x)) \quad \text{et} \quad (\forall x \in A, \text{non}\, P(x))$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in A, \big(P(x) \text{ et non}\, P(x)\big)$$

Puisque la proposition $\big(P(x)$ et non $P(x)\big)$ est absurde, on en déduit qu'il n'y a aucun élément $x \in E$ satisfaisant cette proposition. Cela se traduit par $A = \varnothing$.

Exercice A.2.5 : Utiliser dans cet exercice l'équivalence $\boxed{(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (non\, P \text{ ou } Q)}$, les règles de distributivité, commutativité et associativité.

1. $Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad Q \Rightarrow (non\, P \text{ ou } Q) \quad \Leftrightarrow \quad non\, Q \text{ ou } \left(non\, P \text{ ou } Q\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(non\, Q \text{ ou } Q}_{\text{tautologie}} \text{ ou } non\, P)$

Toujours vraie.

2. $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad P \Rightarrow (non\, P \text{ ou } Q) \quad \Leftrightarrow \quad non\, P \text{ ou } \left(non\, P \text{ ou } Q\right) \quad \Leftrightarrow \quad non\, P \text{ ou } Q$
Faux si P est vraie et Q est fausse.

3. $P \Rightarrow (P \text{ ou } Q) \quad \Leftrightarrow \quad non\, P \text{ ou } \left(P \text{ ou } Q\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(non\, P \text{ ou } P}_{\text{tautologie}} \text{ ou } Q)$

Toujours vraie

4. $P \Rightarrow (P \text{ et } Q) \quad \Leftrightarrow \quad non\, P \text{ ou } \left(P \text{ et } Q\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(non\, P \text{ ou } P)}_{\text{tautologie}} \text{ et } (non\, P \text{ ou } Q) \quad \Leftrightarrow (non\, P \text{ ou } Q)$

Faux si P est vraie et Q est fausse.

5. identique à **3.**

6. $(P \text{ et } Q) \Rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad (non\, P \text{ ou } non\, Q) \text{ ou } Q \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(non\, Q \text{ ou } Q}_{\text{tautologie}} \text{ ou } non\, P)$

Toujours vraie.

On peut aussi étudier ces équivalences en dressant les tables de vérité de chaque proposition.

Exercice A.2.16

1. Procéder comme au A.2.5

2. On pose P :=« $x^5 - x^4 + x^2 + 3 > 0$ » et Q :=« $x < 2$ » .
D'après la question **1.**, montrer que la proposition (P ou Q) est vraie est équivalent à montrer que la proposition ((non Q) $\Rightarrow P$) est vraie.
preuve : On suppose $x \geq 2$. On a

$$x^5 - x^4 + x^2 + 3 = x^4(x-1) + x^2 + 3\,.$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x - 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow x^4(x-1) > 0$$

et l'implication suivante est toujours vraie

$$x \geq 2 \Rightarrow x^2 + 3 > 0\,.$$

Grâce à la compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition, on en déduit que $x^5 - x^4 + x^2 + 3 > 0$.
conclusion : L'implication ((non Q) $\Rightarrow P$) est vraie donc la proposition (P ou Q) est vraie.

Exercice A.2.18 : Respecter le symbole "supérieur stricte".
1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on énonce la phrase $P(n) :=$« $2^n > n$ ».
<u>Initialisation à $n = 0$.</u> $2^n = 2^0 = 1 > n = 0$ donc $P(0)$ est vraie.
<u>Hérédité.</u> Pour $n \geq n_0$ fixé, on montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.
correction. $2^{n+1} = 2^n + 2^n$. Par hypothèse de récurrence, $2^n > n$ donc on a $2^{n+1} > 2n$. Pour conclure, on utlise la résultat $n \geq 1 \Leftrightarrow 2n \geq n+1$. En concaténant les résultats on aboutit à $2^{n+1} > n+1$.
On a donc démontré l'hérédité pour $n \geq n_0 = 1$. Nous devons donc vérifier que $P(1)$ est vraie également.
<u>Initialisation à $n = 1$.</u> $2^n = 2^1 = 2 > n = 1$ donc $P(1)$ est vraie.
<u>Conclusion</u> : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

2. <u>Etudier l'hérédité</u>. Cherchons $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq p,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$
correction. $2^{n+1} = 2^n + 2^n$. Par hypothèse de récurrence, $2^n > n^2$ donc on a $2^{n+1} > 2n^2$. Pour conclure, on cherche p tel que $n \geq p \Rightarrow 2n^2 \geq (n+1)^2$. Cela revient à étudier le signe de $n^2 - 2n - 1$ qui est positif pour les entiers $n \geq p = 3$. En concaténant les résultats on aboutit à $2^{n+1} > (n+1)^2$.
On a donc démontré l'hérédité pour $n \geq p = 3$.
Cependant, $P(3)$ et $P(4)$ sont fausse d'où
<u>Initialisation à $n = 5$.</u> $2^n = 2^5 = 32 > 5^2 = 25$ donc $P(5)$ est vraie.
<u>Conclusion</u> : $\forall\, n \in [\![5, +\infty[\![$, $2^n > n^2$.

Exercice A.2.22 :

1. Vrai. En effet, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists y = -x \in \mathbb{R},\ x + y = 0.$

2. Faux car la négation est vraie. En effet, $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists x = -y + 1 \in \mathbb{R},\ x + y = 1 \neq 0$

3. Faux car la négation est vraie. En effet, $\exists\, x = 0 \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ xy \neq 1$

4. Faux car la négation est vraie. En effet, $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x = 0 \in \mathbb{R},\ xy = 0 \neq 1$

5. Vrai. En effet, $\exists\, y = 0 \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x + y = x + 0 \neq x$. La valeur $y = 0$ est appelée élément neutre pour l'addition (cf MT03).

Exercice A.2.23 - question 4 : Il faut démontrer la contraposée, c'est-à-dire

$$\Big(\big(\exists\, x \in \mathbb{R},\ \text{non}\, P(x)\big) \text{ et } \big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ \text{non}\, Q(x)\big)\Big) \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R},\ \big(\text{non}\, P(x) \text{ et non}\, Q(x)\big)$$

preuve : Par hypothèse il existe au moins un élément $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant la propriété (non P). Comme la propriété (non Q) est satisfaite par tous les éléments de $\mathbb{R}$, elle est vraie pour x. On en déduit que (non $P(x)$ et non $Q(x)$) est vraie.

Exercice A.2.24 : Pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pose

$$K_f = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\} \quad \text{et} \quad I_f = \{y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}.$$

On note E l'ensemble des applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Il faut comprendre que :
Le symbole $\{\cdots\}$ signifie *l'ensemble de* .
K_f est l'ensemble des solutions x dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$.
I_f est l'ensemble des images par f ou encore $I_f = \mathrm{Im} f = f(\mathbb{R})$.

1. • La proposition "$\forall\, f \in E, K_f \neq \varnothing$" est fausse car sa négation "$\exists\, f \in E, K_f = \varnothing$" est vraie. Un exemple est la fonction constante suivante :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1 \end{array}$$

• La proposition "$\forall\, f \in E, I_f \neq \varnothing$" est vraie par définition d'une application. En effet, si $f \in E$ alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R},\ y = f(x) \ \Rightarrow\ \exists\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R},\ y = f(x) \ \Rightarrow\ \exists\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R},\ y = f(x) \ \Rightarrow\ I_f \neq \varnothing.$$

Exercice 1 hors poly. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les deux propositions suivantes :

$P(n)$: « $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est un multiple de 7 »
et $Q(n)$: « $3^{2n+2} + 2^{n+1}$ est un multiple de 7 ».

1. Démontrer que P et Q sont héréditaires.
2. Peut-on affirmer qu' $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq n_0$, $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est un multiple de 7 ?
3. Peut-on affirmer qu' $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq n_0$, $3^{2n+2} + 2^{n+1}$ est un multiple de 7 ?

Correction.

1. Hérédité de $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \geq 0$. On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
On suppose que $P(n)$:=« le nombre $A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7 » est vraie.

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 3^{2(n+1)+2} - 2^{(n+1)+1} = 3^2 \times 3^{2n+2} - 2^1 \times 2^{n+1} \\ &= 9 \times 3^{2n+2} - 2 \times 2^{n+1} = \underbrace{7 \times 3^{2n+2}}_{\text{divisible par 7}} + 2(3^{2n+2} - 2^{n+1}). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, le nombre $(3^{2n+2} - 2^{n+1})$ est divisible par 7 donc A_{n+1} aussi.

Hérédité de $(Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \geq 0$. On montre que $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$.
On suppose que $Q(n)$:=« le nombre $B_n = 3^{2n+2} + 2^{n+1}$ est divisible par 7 » est vraie.

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= 3^{2(n+1)+2} + 2^{(n+1)+1} = 3^2 \times 3^{2n+2} + 2^1 \times 2^{n+1} \\ &= 9 \times 3^{2n+2} + 2 \times 2^{n+1} = \underbrace{7 \times 3^{2n+2}}_{\text{divisible par 7}} + 2(3^{2n+2} + 2^{n+1}). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, le nombre $(3^{2n+2} + 2^{n+1})$ est divisible par 7 donc B_{n+1} aussi.

2. Oui avec $n_0 = 0$. On vérife que $P(0)$ est vraie.

$$A_0 = 3^2 - 2^1 = 9 - 2 = 7.$$

3. Non, il n'existe aucune valeur $n_0 \in \mathbb{N}$ pour initialiser la récurrence.
On peut affirmer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, non $Q(n)$. On raisonne par l'absurde.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ est vraie. Alors A_n et B_n sont tous deux divisibles par 7. La différence $B_n - A_n$ est donc divisible par 7 :

$$\exists\, k \in \mathbb{N},\ B_n - A_n = 2 \times 2^{n+1} = 7k.$$

Ceci est absurde car 2 est le seul diviseur premier de $B_n - A_n$.
La négation est fausse donc la phrase $\forall\, n \in \mathbb{N}$, non $Q(n)$ est vraie.

Exercice 2 hors poly. Soit E un ensemble et A, B et C trois parties de E. On suppose que $(A\cap B)\subset(A\cap C)$ et $(A\cup B)\subset(A\cup C)$.

1. Quelle relation y a-t-il entre B et C ?
2. Démontrer ce résultats.

Correction.

1. Avec schéma, on conjecture que $B\subset C$.

2. Pour démontrer une inclusion, on démontre l'implication $\boxed{x\in B\Rightarrow x\in C}$.
Les hypothèses sont ① $(A\cap B)\subset(A\cap C)$ et ② $(A\cup B)\subset(A\cup C)$.

$$x\in B\Rightarrow x\in(A\cup B)\underset{②}{\Rightarrow} x\in A\cup C\Rightarrow (x\in A)\text{ ou }(x\in C)$$

On continue par disjonction de cas :
• Si $x\in A$ alors $x\in A\cap B$. D'après ①, alors $x\in A\cap C\subset C$.
• Si $x\in C$, la démonstration est finie.
Conclusion : On a bien $B\subset C$.

Exercice 3 hors poly. Soit E un ensemble et A, B et C trois parties de E. Démontrer l'équivalence suivante :

$$(A \cup B = A \cap C) \Leftrightarrow (B \subset A \subset C)\,.$$

Correction.

On procède par double équivalence.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ce sens est évident : $B \subset A \subset C \quad \Rightarrow \quad A \cup B = A$ et $A \cap C = A$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $A \cup B = A \cap C$ et on montre deux inclusions $B \subset A$ et $A \subset C$.
• Pour montrer $B \subset A$, on montre l'implication $x \in B \Rightarrow x \in A$.

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in A$$

• Pour montrer $A \subset C$, on montre l'implication $x \in A \Rightarrow x \in C$.

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in C$$

Exercice 4 hors poly. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $n+1$ réels $x_0, \dots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant

$$0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1\,.$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer par l'absurde la proposition suivante

$$P := \text{“ Il y a deux de ces réels qui sont distants d'au plus } \frac{1}{n} \text{ ”.}$$

1. Réécrire la proposition P à l'aide de quantificateurs et de symboles mathématiques.
2. Écrire la négation de cette proposition.
3. Démontrer la proposition P par l'absurde.

Correction.

1. $P :=$ « $\exists (i,j) \in [\![0,n]\!],\ i \neq j$ et $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}$ ».

2. $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!],\ i = j$ ou $|x_i - x_j| > \frac{1}{n}$.

3. On montre que $non\, P$ est fausse :
On sait que $0 \leq x_0 \leq x_n \leq 1$ donc $x_n - x_0 \leq 1$.
Ensuite on décompose la différence $x_n - x_0$ comme suit

$$x_n - x_0 = \underbrace{(x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)}_{\text{il y a bien } n \text{ termes}}$$

D'après le **2.** on obtient

$$x_n - x_0 > n \times \frac{1}{n} = 1.$$

On a $\boxed{x_n - x_0 \leq 1}$ et $\boxed{x_n - x_0 > 1}$ ce qui est absurde.
La négation est fausse donc la proposition P est vraie.

Exercice 5 hors poly. Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on définit la fonction indicatrice de l'ensemble A, notée $\mathbf{1}_A$, par

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Étant données deux parties A et B de E, de quel ensemble les fonctions suivantes sont-elles les indicatrices ?

① $\min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$	③ $\mathbf{1}_E - \mathbf{1}_A$	⑤ $\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$
② $\max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$	④ $\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$	⑥ $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$

Correction.

Pour étudier ces fonctions, on peut décomposer l'ensemble E en 4 sous-ensembles disjoints

$$x \in E \leftrightarrow \Big(\underbrace{x \in A \text{ et } x \in B}_{x\in A\cap B}\Big) \text{ ou } \Big(\underbrace{x \notin A \text{ et } x \in B}_{x\in B\setminus A}\Big) \text{ ou } \Big(\underbrace{x \in A \text{ et } x \notin B}_{x\in A\setminus B}\Big) \text{ ou } \Big(\underbrace{x \notin A \text{ et } x \notin B}_{x\in E\setminus (A\cup B)}\Big)$$

1. Il s'agit de $\mathbf{1}_{A\cap B}$. En effet

$$x \in A \text{ et } x \in B \Rightarrow \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = \min(1,1) = 1$$

$$x \notin A \text{ et } x \in B \Rightarrow \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = \min(0,1) = 0$$

$$x \in A \text{ et } x \notin B \Rightarrow \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = \min(1,0) = 0$$

$$x \notin A \text{ et } x \notin B \Rightarrow \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = \min(0,0) = 0$$

La fonction prend la valeur 1 uniquement dans l'ensemble $A \cap B$.

2. Il s'agit de $\mathbf{1}_{A\cup B}$. En effet

$$x \in A \text{ et } x \in B \Rightarrow \max(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = \max(1,1) = 1$$

$$x \notin A \text{ et } x \in B \Rightarrow \max(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = \max(0,1) = 1$$

$$x \in A \text{ et } x \notin B \Rightarrow \max(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = \max(1,0) = 1$$

$$x \notin A \text{ et } x \notin B \Rightarrow \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = \min(0,0) = 0$$

La fonction prend la valeur 1 dans l'ensemble $\Big(A \cap B\Big) \cup \Big(\complement_E A \cap B\Big) \cup \Big(A \cap \complement_E B\Big) = A \cup B$. (Faire une figure pour s'en convaincre).

Pour le reste, il faut trouver :
3. Il s'agit de $\mathbf{1}_{\complement_E A}$ ou $\mathbf{1}_{E\setminus A}$.
4. Il s'agit de $\mathbf{1}_{A\cap B}$.
5. Il s'agit de $\mathbf{1}_{A\setminus B}$.
6. Il s'agit de $\mathbf{1}_{A\cup B}$.

Exercice 6 hors poly. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On définit la différence symétrique par $A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

1. Vérifier que $\mathbf{1}_{A\Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$.

2. Montrer que $C\cap(A\Delta B) = (A\cap C)\Delta(B\cap C)$ à l'aide d'opérations sur les ensembles.

3. Retrouver ce résultat à l'aide des fonctions indicatrices.

Correction. A finir

1. Faire une figure pour distinguer l'ensemble $A\Delta B$. Puis utiliser l'exercice précédent.

$$\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B \quad \text{et } \mathbf{1}_{B\setminus B} = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{1}_{A\Delta B} = (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B) + (\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B) - \underbrace{(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B)\times(\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B)}_{=0} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\times\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B.$$

2. On a

$$(A\Delta B)\cap C = \Big((A\setminus B)\cup(B\setminus A)\Big)\cap C = \Big((A\setminus B)\cap C\Big)\cup\Big((B\setminus A)\cap C\Big) = \Big(A\cap \complement_E B\cap C\Big)\cup\Big(\complement_E A\cap B\cap C\Big)$$

et

$$\begin{aligned}(A\cap C)\Delta(B\cap C) &= \Big((A\cap C)\setminus(B\cap C)\Big)\cup\Big((B\cap C)\setminus(A\cap C)\Big)\\
&= \Big((A\cap C)\cap \complement_E(B\cap C)\Big)\cup\Big((B\cap C)\cap \complement_E(A\cap C)\Big)\\
&= \Big((A\cap C)\cap\Big(\complement_E B\cup \complement_E C\Big)\Big)\cup\Big((B\cap C)\cap\Big(\complement_E A\cup \complement_E C\Big)\Big)\\
&= \Big((A\cap C\cap \complement_E B)\cup \underbrace{(A\cap C\cap \complement_E C)}_{=\varnothing}\Big)\cup\Big((B\cap C\cap \complement_E A)\cup \underbrace{(B\cap C\cap \complement_E C)}_{=\varnothing}\Big)\\
&= (A\cap C\cap \complement_E B)\cup(B\cap C\cap \complement_E A).\end{aligned}$$

Par associativité de l'intersection, les deux ensembles sont égaux.
3. Calculer les indicatrices des deux ensembles : utiliser l'exercice précédent et **1**.

$$\mathbf{1}_{(A\setminus B)\cap C} = \Big(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\times\mathbf{1}_A\times\mathbf{1}_B\Big)\times\mathbf{1}_C$$
$$(A\cap C)\Delta(B\cap C) = \mathbf{1}_{A\cap C} + \mathbf{1}_{B\cap C} - 2\times\mathbf{1}_{A\cap C}\times\mathbf{1}_{B\cap C} = \mathbf{1}_A\times\mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B\times\mathbf{1}_C - 2\times\mathbf{1}_A\times\mathbf{1}_B\times\mathbf{1}_C$$

Les fonctions indicatrices associées sont égales donc les ensembles sont égaux.