Exercice A.2.1 : Il faut démontrer la proposition suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow |u_n - \tfrac{1}{2}| > \varepsilon).$$

On suit la méthodologie vue en cours : Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

(i) On simplifie, si possible, l'expression $|u_n - \frac{1}{2}|$:

$$|u_n - \tfrac{1}{2}| = |\tfrac{n-1}{2n} - \tfrac{1}{2}| = |\tfrac{(n-1)-n}{2n}| = |\tfrac{-1}{2n}| = \tfrac{1}{2n}.$$

(ii) On résout (par équivalence) l'inégalité $|u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ d'inconnue n.

$$|u_n - \tfrac{1}{2}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2\varepsilon} < n \; .$$

(iii) On conclut : On pose $N = E(\frac{1}{2\varepsilon}) + 1$. On a bien

$$n > N \Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow |u_n - \tfrac{1}{2}| < \varepsilon$$

La définition avec quantificateurs est démontrée.

Exercice A.2.4 : On n'utilise pas la définition avec quantificateurs ici.

(i) $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$. On utilise le premier corollaire du théorème des gendarmes puisque

$$\forall\, n \geq 1,\ |u_n| \leq \frac{1}{n}$$

Or, $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc la suite (u_n) converge vers 0 également.

(ii) Le terme général est indéterminé. On applique la méthode du conjugué pour les racines :

$$u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \times \frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$$

L'expression obtenue n'est plus indéterminée : $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 (= \frac{1}{+\infty})$.

(iii) On peut montrer que la suite (u_n) converge en étudiant les variations de (u_n). On a $u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(1 + \frac{1}{n})$. Comme ln est une fonction croissante, on a

$$n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \ln(1+\tfrac{1}{n}) > \ln(1 + \tfrac{1}{n+1}) \Rightarrow u_n > u_{n+1}$$

La suite u_n est strictement décroissante. De plus elle est minorée par 0 car

$$1 + \frac{1}{n} > 1 \quad \Rightarrow \quad u_n = \ln(1 + \tfrac{1}{n}) > \ln 1 = 0.$$

Toute suite décroissante et minorée converge.

Cependant pour trouver la valeur de la limite, nous avons besoin de la continuité de la fonction ln. Si $1 + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$ alors $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\to} \ln 1 = 0$.

(iv) On remarque que $0 \leq a < b \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{a}{b} < 1$. Ainsi on fait apparaître la suite géométrique $\left((\frac{a}{b})^n\right)_{n\geq 0}$ dans le terme général de u_n :

$$u_n = \frac{a^n + b^n}{a^n - b^n} = \frac{b^n}{b^n} \times \frac{\frac{a^n}{b^n} + 1}{\frac{a^n}{b^n} - 1} = \frac{(\frac{a}{b})^n + 1}{(\frac{a}{b})^n - 1}$$

Comme, $0 \leq \frac{a}{b} < 1 \quad \Rightarrow \quad (\frac{a}{b})^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, on en déduit que la suite (u_n) converge et tend vers -1.

(v) On connait l'expression explicite de $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. On peut utiliser le théorème de comparaison à l'infini : comme $\forall\, n \geq 0,\ u_n \geq n$, on a

$$n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty.$$

(vi) Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. On calcule alors le terme général :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{5}\right)^k = 1 + \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{5}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

Comme $|-\frac{1}{5}| < 1$ on a $\left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. La suite converge vers $\frac{5}{6}$.

(vii) On rappelle que $n!$ est le factoriel de n et correspond au produit des n premiers entiers (en commençant par 1 biensûr) :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

On réécrit alors u_n comme un produit de n fractions :

$$u_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n}{n \times n \times n \times \cdots \times n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n}.$$

On remarque alors que les numérateurs sont toujours inférieurs ou égaux au dénominateurs puisqu'il s'agit des entiers plus petit que n. On a donc

$$u_n = \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n}}_{\leq 1}$$

On conclut avec le théorème des gendarmes : comme $\forall n \geq 1, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$, on a

$$\frac{1}{n} \underset{\to\infty}{\to} 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{\to\infty}{\to} 0.$$

(viii) On procède comme au (vi). On réécrit u_n comme un produit de n fractions :

$$u_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{n-1} \times \frac{2}{n}.$$

Exceptée la première fraction, les dénominateurs sont toujours supérieurs ou égaux au numénateurs puisqu'il s'agit des entiers compris entre 2 et n. On a donc

$$u_n = \frac{2}{1} \times \underbrace{\frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{n-1}}_{\leq 1} \times \frac{2}{n}$$

On conclut avec le théorème des gendarmes : comme $\forall n \geq 1, 0 \leq u_n \leq \frac{4}{n}$, on a

$$\frac{4}{n} \underset{\to\infty}{\to} 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{\to\infty}{\to} 0.$$

(ix) Il s'agit du produit des deux précédentes suites :

$$u_n = \frac{2^n}{n^n} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{2^n}{n!}.$$

D'après les opérations sur les limites des suites convergentes, on en déduit que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Exercice A.2.8 du chapitre 2 : Dans cet exercice on utilise quelques outils du chapitre 3

1. On étudie l'ensemble $A := \{1 + \frac{(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Pour déterminer l'existence de minorants/majorants, de plus grand élément/plus petit élément, borne inf/borne sup, il faut essayer d'ordonner les termes de la suites.

La présence de $(-1)^n$ dans la définition de u_n nous incite à travailler avec les suites extraites : $u_{2k} = 1 + \frac{(-1)^{2k}}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$ et $u_{2k+1} = 1 + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1}$. La suite (u_{2k}) est définie pour $k \geq 1$ et la suite (u_{2k+1}) est définie pour $k \geq 0$.

Comme la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est décroissante, il en va de même des suites de terme général $\frac{1}{2k}$ et $\frac{1}{2k+1}$. La suite $(u_{2k})_{k\geq 1}$ est donc décroissante et la suite $(u_{2k+1})_{k\geq 0}$ est croissante car la multiplication par -1 change le sens de variation. On résume cela par ces enchaînements d'inégalités

$$\cdots \leq u_{2k} \leq \cdots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$u_1 = 0 \leq u_3 = \frac{2}{3} \leq \cdots \leq u_{2k+1} \leq \cdots$$

Ce qui est intéressant est qu'on a

$$u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \geq 1 \qquad \text{et} \qquad u_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1} \leq 1$$

Donc on peut concaténer les inégalités successives comme suit

$$u_1 = 0 \leq u_3 = \frac{2}{3} \leq \cdots \leq u_{2k+1} \leq \cdots \leq 1 \leq \cdots \leq u_{2k} \leq \cdots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

On conclut que l'ensemble A admet un plus petit élément $\min A = u_1 = 0$ et un plus grand élément $\max A = u_2 = \frac{3}{2}$.

On sait aussi que lorsque $\min A$ et $\max A$ existent alors $\inf A = \min A$ et $\sup A = \max A$ existent aussi.

2. On étudie l'ensemble $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

On procède de la même façon. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = (-1) + \frac{1}{n}$.

La présence de $(-1)^n$ dans la définition de u_n nous incite à travailler avec les suites extraites : $u_{2k} = (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$ et $u_{2k+1} = (-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1}$. La suite (u_{2k}) est définie pour $k \geq 1$ et la suite (u_{2k+1}) est définie pour $k \geq 0$.

La suite $(u_{2k})_{k\geq 1}$ est donc décroissante et la suite $(u_{2k+1})_{k\geq 0}$ est décroissante également. On résume cela par ces enchaînements d'inégalités

$$\cdots \leq u_{2k} \leq \cdots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\cdots \leq u_{2k+1} \leq \cdots \leq u_3 = -\frac{2}{3} \leq u_1 = 0$$

Ce qui est intéressant est qu'on a

$$u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \geq 1 \qquad \text{et} \qquad u_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \leq 0$$

Donc on peut concaténer les inégalités successives comme suit

$$\cdots \leq u_{2k+1} \leq \cdots \leq u_3 = -\frac{2}{3} \leq u_1 = 0 \leq 1 \leq \cdots \leq u_{2k} \leq \cdots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

On conclut que l'ensemble B admet un plus grand élément $\max B = u_2 = \frac{3}{2}$. On sait aussi que lorsque $\max B$ existe alors $\sup B = \max B$ existe aussi.

Pour la borne inf, c'est plus compliqué. On commence par justifier qu'elle existe :

$$n > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} > 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \geq (-1)^n \geq -1 \ .$$

L'ensemble B est minoré par -1 c'est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car $u_1 = 0 \in B$). d'après l'axiome de la borne inférieure $\inf B$ existe. Il faut avoir l'intuition que $\inf B = -1$ en étudiant les limites des suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}).

<u>Montrons que $\inf B = -1$</u> : pour ce faire il faut démontrer les deux caractérisations de la borne inférieure.

$$\begin{cases} 1)\ \forall x \in B,\ -1 \leq x \\ 2)\ \forall t > -1,\ \exists x \in B,\ x < t \ . \end{cases}$$

La première caractérisation 1) est déjà justifiée plus haut. Il reste à prouver la seconde.

<u>démonstration</u> : Soit $t > -1$. On cherche $x = u_n$ tel que $x < t$. Il suffit de résoudre cette inégalité d'inconnue n. Comme on sait que ce sont les termes d'indices impairs qui sont proches de -1, on peut poser $n = 2k + 1$.

$$u_{2k+1} < t \quad \Leftrightarrow \quad -1 + \frac{1}{2k+1} < t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{t+1} < 2k+1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - 1\right) < k$$

On pose $k = E\Big(\frac{1}{2}\big(\frac{1}{t+1} - 1\big)\Big) + 1$. On a bien $u_{2k+1} \in B$ et $-1 \leq u_{2k+1} < t$. La seconde caractérisation est bien démontrée.

NB : Notez que $t > -1 \Rightarrow t + 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{t+1} - 1 > -1 \Rightarrow k = E\Big(\frac{1}{2}\big(\frac{1}{t+1} - 1\big)\Big) + 1 \geq 0$. L'indice proposé est bien dans $\mathbb{N}$.

Exercice A.2.7 - Question 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$. Nous allons étudier les suites récurrentes définies par le choix arbitraire de $u_0 \in [0, +\infty[$ et de terme général défini par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Comme indiqué en cours, commencez par rechercher les limites possibles d'une telle suite en résolvant l'équation

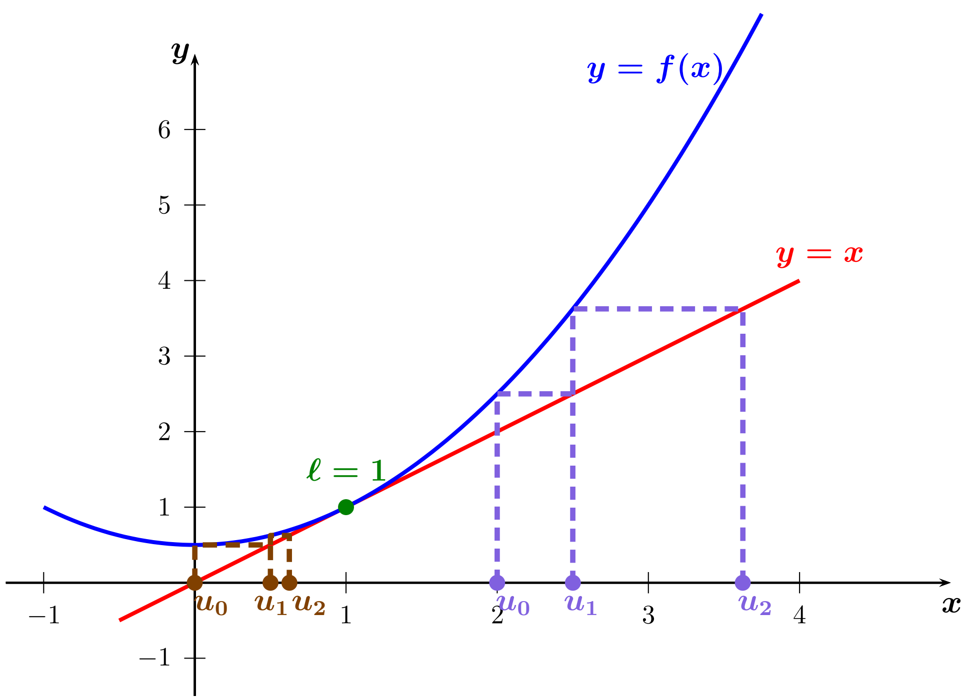
$$f(\ell) = \ell.$$

On a

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{2} = x \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}.$$

La fonction admet donc un seul point fixe. On sait donc que **si la suite (u_n) converge alors sa seule limite possible est $\ell = 1$**.

Pour la représentation graphique, on construit les premiers termes de plusieurs suites en choisissant u_0 de part et d'autres de la valeur $\ell = 1$. Sur le schéma ci-dessous, on a choisi $\boldsymbol{u_0 = 0}$ puis $\boldsymbol{u_0 = 2}$.



Ceci fait, conjecturons tous les comportements possibles dans l'hypothèse où $u_0 \geq 0$:

(i) Si $u_0 \in [0, 1[$, alors la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.

(ii) Si $u_0 = 1$ alors la suite u_n est constante.

(iii) Si $u_0 > 1$, alors la suite (u_n) est croissante et n'est pas majorée. Elle diverge vers $+\infty$.

(b) Démonstrations des conjectures :

(i) **Hypothèse** : $u_0 \in [0, 1[$.

• On montre par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n < 1$

Initialisation à $n = 0$: il s'agit de l'hypothèse sur u_0.

Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $0 \leq u_n < 1$. On encadre pas à pas $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$:

$$0 \leq u_n < 1 \Rightarrow 0 \leq u_n^2 < 1 \Rightarrow 2 \leq u_n^2 + 1 < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{u_n^2+1}{2} < 1 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} < 1.$$

Conclusion : L'initialisation et l'hérédité sont satisfaites donc $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n < 1$.
• On montrer que la suite (u_n) est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{u_n^2+1-2u_n}{2} = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geq 0.$$

• La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. On conclut donc que (u_n) converge. Comme sa limite ℓ doit être un point fixe de f, on en déduit que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} \ell = 1$.

(ii) **Hypothèse** : $u_0 = 1$.
• On montre par récurrence sur $n \geq 0$ que la suite (u_n) est constante.
Initialisation à $n = 0$: il s'agit de l'hypothèse sur u_0.
Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $u_n = 1$. On calcule alors $u_{n+1} = f(u_n) = f(1) = 1$.
Conclusion : L'initialisation et l'hérédité sont satisfaites donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.
• Toute suite constante converge. Sa limite est $\ell = u_0 = 1$.

(iii) **Hypothèse** : $u_0 \in \,]1, +\infty[$.
• On sait que la suite (u_n) est croissante. En effet, l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ effectué plus haut reste valable.
• On montre par l'absurde que la suite diverge. (Pas facile à trouver soi-même mais la technique doit être mémorisée pour le final).
démonstration : Supposons que (u_n) converge. On sait alors que la suite converge vers $\ell = 1$ car c'est la seule limite possible. D'après le cours **proposition 3.1.4**, on sait que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell = 1}$.
Or, par hypothèse on a $u_0 > 1$ (supérieur stricte). Ceci est contradictoire avec la phrase encadrée pour $n = 0$.

La phrase "$1 < u_0 \leq 1$" est absurde.

La négation de "(u_n) converge " mène à une absurdité donc la proposition "(u_n) diverge" est vraie.
• On montre par l'absurde que la suite tend vers $+\infty$. (Pas facile à trouver soi-même mais la technique doit être mémorisée pour le final).
démonstration : On suppose que la suite (u_n) ne tend pas vers $+\infty$. On prend la négation de

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N \Rightarrow u_n > A). \qquad (\textbf{definition 3.1.2})$$

Cela donne

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n > N \text{ et } u_n \leq A.$$

Comme la suite est croissante, on a $n > N \Rightarrow u_N \leq u_n$ donc la phrase devient

$$\boxed{\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, u_N \leq A.}$$

On peut alors en déduire que (u_n) est majorée.
Or, si (u_n) est majorée et croissante, le cours affirme que (u_n) converge. Ce qui est absurde car (u_n) diverge.
La négation de "(u_n) tend vers $+\infty$ " mène à une absurdité donc la proposition "(u_n) tend vers $+\infty$" est vraie.

Exercice A.2.13 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose $0 < b < a$ (donc $(a-b) > 0$).
On considère les suites définies par $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ et les relations de récurrences

$$u_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a+b} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{bu_n + av_n}{a+b}.$$

(i) On commence par étudier la suite de terme général $w_n = v_n - u_n$:
Montrer que (w_n) est une suite géométrique, càd $\exists\, 0 < q < 1,\ w_{n+1} = qw_n$.
En déduire l'expression de w_n en fonction de n et w_0 et sa limite quand $n \to +\infty$.
Puis justifier que les termes de la suite (w_n) sont soit « tous positifs » soit « tous négatifs ».

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a+b} - \frac{bu_n + av_n}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}(u_n - v_n)\ .$$

La suite $(u_n - v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{a-b}{a+b}$ donc $u_n - v_n = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n (u_0 - v_0)$.
D'après les hypothèses sur a et b, on a

$$0 < b < a \Rightarrow 0 < a - b < a + b \Rightarrow 0 < \tfrac{a-b}{a+b} < 1 \Rightarrow u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Comme la raison est strictement positive, on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $w_n = u_n - v_n$ est constant et égal au signe du premier terme $w_0 = u_0 - v_0$.

(ii) Montrer que l'une des suites est croissante et l'autre décroissante : on peut seulement montrer que les quantités $(u_{n+1} - u_n)$ et $(v_{n+1} - v_n)$ sont de signe constant et contraire.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{au_n + bv_n}{a+b} - u_n = \frac{-bu_n + bv_n}{a+b} = -\frac{b}{a+b}(u_n - v_n).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ garde un signe constant et est égal au signe opposé de $u_0 - v_0$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{bu_n + av_n}{a+b} - v_n = \frac{bu_n - bv_n}{a+b} = \frac{b}{a+b}(u_n - v_n).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n$ garde un signe constant et est égal au signe de $u_0 - v_0$.
<u>conclusion</u> : L'une des suites est croissante, l'autre décroissante et $v_n - u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

(iii) Pour déterminer leur limite commune ℓ on s'intéresse à la suite $s_n = u_n + v_n$.
Montrer que (s_n) est une suite constante.
En déduire la limite commune de (v_n) et (u_n) en fonction de u_0 et v_0. On a

$$w_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a+b} + \frac{bu_n + av_n}{a+b} = \frac{(a+b)u_n + (b+a)v_n}{a+b} = u_n + v_n\ .$$

La suite (w_n) est contante donc sa limite est $u_0 + v_0$.
D'après les opérations sur les limites, en posant $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = 2\ell = u_0 + v_0.$$

Donc $\ell = \frac{u_0+v_0}{2}$.

Exercice 1 hors poly. Convergence absolue

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite et $S_n = \sum\limits_{k\geq 0}^{n} u_k$ la série numérique associée.

On pose $v_n = \max(u_n, 0)$ et $w_n = \min(u_n, 0)$, puis

$$S_n^+ = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \qquad \text{et } S_n^- = w_0 + w_1 + \cdots + w_n.$$

1. Montrer que les suites (S_n^+) et (S_n^-) sont monotones.
2. On sait que $u_n = v_n + w_n$. On suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge également.
3. Montrons que la réciproque est fausse avec $(u_n = \frac{(-1)^n}{n})_{n\geq 1}$.*(Indication : montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.)*

Correction.

1. $$S_{n+1}^+ - S_n^+ = v_{n+1} = \max(u_{n+1}, 0) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (S_n^+) \text{ est croissante}$$
$$S_{n+1}^- - S_n^- = w_{n+1} = \min(u_{n+1}, 0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (S_n^-) \text{ est décroissante}$$

2. Comme $S_n = S_n^+ + S_n^-$, on montre que (S_n^+) et (S_n^+) sont convergentes. Comme elles sont monotones, il reste à justifier que (S_n^+) est majorée et (S_n^-) est minorée.
   Par hypothèse $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge vers une limite ℓ. Comme il s'agit d'une suite croissante, on a $\forall\, n \geq 0,\ \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k| \leq \ell$.
$$v_n = \max(u_n, 0) \leq |u_n| \Rightarrow \quad S_n^+ \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leq \ell$$
$$v_n = \min(u_n, 0) \geq -|u_n| \Rightarrow \quad S_n^- \geq -\sum_{k=0}^{n} |u_k| \geq -\ell$$

3. Pour montrer que (S_n) converge, il suffit de montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ. *(Ainsi, tous les termes de la suite convergent vers ℓ. Voir une preuve plus bas)*
   (a) (S_{2n}) est décroissante
$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} < 0.$$
   (b) (S_{2n+1}) est croissante
$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} > 0.$$
   (c) $S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$

   Cependant, d'après les règles de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ diverge.

preuve : de (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers $\ell \Rightarrow (S_n)$ converge vers ℓ également.

$$\text{Hypothèse 1 :} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \left(n > N_1 \text{ et } n \text{ impair} \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\right)$$
$$\text{Hypothèse 2 :} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \left(n > N_2 \text{ et } n \text{ pair} \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\right)$$
$$\text{Conclusion :} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \left(n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\right)$$

Exercice 2. Avec les règles de Riemann, étudier la convergence simple , pour tout $x \in \mathbb{R}$, de

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt{n+x^2}-\sqrt{n}\right)\ , \quad \sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{\pi}{n^x}\right), \quad \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}.$$

Correction.

1. Utiliser la méthode du conjugué pour modifier le terme général. Pour $x>0$ fixé la série diverge : avec la méthode du conjugué on a

$$u_n(x)=\sqrt{n+x^2}-\sqrt{n}=\frac{x^2}{\sqrt{n+x^2}+\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{x^2}{2}\neq 0.$$

   Règle de Riemann avec une puissance $\alpha=\frac{1}{2}\leq 1$.

2. Utiliser la limite usuelle $\frac{\sin t}{t}\underset{t\to 0}{\to} 1$.On applique la règle de Riemann avec une puissance $\alpha = x$:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n^x}\right)}{\frac{\pi}{n^x}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \quad \Rightarrow \quad n^x u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \pi\neq 0.$$

   Par conséquent, la série converge si $x>1$ et diverge si $0<x\leq 1$.

3. Montrer qu'il existe une constant indépendante de n tq $\frac{x^n}{n!}\leq\frac{C}{n(n-1)}$ (on peut procéder comme à l'exercice A.2.4 (viii)).Pour $0<x\leq 1$, on a $\forall n\geq 2$, $\frac{x^n}{n!}\leq\frac{1}{n(n-1)}$.
   Pour $x>1$, on peut procéder comme à l'exercice A.2.4 :

   Pour $n\geq E(x)+2$, on a $$\frac{x^n}{n!}=\frac{x^2}{n(n-1)}\times\underbrace{\frac{x}{n-2}\times\cdots\times\frac{x}{E(x)+1}}_{\leq 1}\times\frac{x}{E(x)}\times\frac{x}{E(x)-1}\times\cdots\times\frac{x}{1}$$

$$\Rightarrow \quad 0<\frac{x^n}{n!}\leq\frac{1}{n(n-1)}\frac{x^{E(x)+2}}{E(x)!}.$$

   D'après les règles de Riemann la série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ converge donc la série exponentielle aussi (car elle est croissante et majorée).

Exercice 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, étudier la convergence simple des suites de fonctions de termes généraux suivants

1. $u_n(x) = \dfrac{x+n}{\sqrt{(nx)^2+1}}$
2. $u_n(x) = \dfrac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$
3. $u_n(x) = \cos^{2n}(\pi x)$
4. $u_n(x) = e^{-\frac{1}{n^x}}$

Correction.

1. Pour $x = 0$, on a $u_n(0) = n \to +\infty$.
   Pour $x \neq 0$, on a
   $$u_n(x) = \frac{\frac{x}{n}+1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{x^2}}$$
   La limite simple est définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{1}{|x|}$. Le nombre $f(0)$ n'existe pas car la suite diverge.
2. Si $x = 1$ alors $u_n(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   Si $x = -1$ alors $u_n(-1) = \frac{1-(-1)}{1+1} = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
   Si $|x| < 1$ alors $x^{2n} \underset{n\to+\infty}{0}$ et $x^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{0}$.
   Si $|x| > 1$, alors il faut procéder comme au A.2.4 (iv) :
   $$u_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{x^{2n}} \frac{\frac{1}{x^{2n+1}}-1}{\frac{1}{x^{2n}}+1} = x\frac{\frac{1}{x^{2n+1}}-1}{\frac{1}{x^{2n}}+1} \underset{n\to+\infty}{\to} x\frac{0-1}{0+1} = -x$$
   La limite simple est
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \\ -x & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$
3. Si $x \in \mathbb{Z}$ alors $\cos(\pi x) = \pm 1$ et $u_n(x) = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
   Si $x \notin \mathbb{Z}$ alors $|\cos(\pi x)| < 1$ et $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   La limite simple est $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$ (fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{Z}$).
4. Si $x > 0$ alors $\frac{1}{n^x} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} e^0 = 1$.
   Si $x = 0$ alors $\frac{1}{n^0} = 1$ et $u_n(x) = e^{-1} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-1}$.
   Si $x < 0$ alors $\frac{1}{n^x} = n^{-x} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0 (= e^{-\infty})$.
   La limite simple est la fonction de Heaviside (on met ce qu'on veut en 0)
   $$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{e} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$