Chapitre 1. Corrigés des exercices.

Exercice A.2.5 : Utiliser dans cet exercice l'équivalence $\boxed{(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (non\, P \text{ ou } Q)}$, les règles de distributivité, commutativité et associativité.

1. $Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad Q \Rightarrow (non\, P \text{ ou } Q) \quad \Leftrightarrow \quad non\, Q \text{ ou } \big(non\, P \text{ ou } Q\big) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(non\, Q \text{ ou } Q}_{\text{tautologie}} \text{ ou } non\, P)$

Toujours vraie.

2. $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad P \Rightarrow (non\, P \text{ ou } Q) \quad \Leftrightarrow \quad non\, P \text{ ou } \big(non\, P \text{ ou } Q\big) \quad \Leftrightarrow \quad non\, P \text{ ou } Q$
Faux si P est vraie et Q est fausse.

3. $P \Rightarrow (P \text{ ou } Q) \quad \Leftrightarrow \quad non\, P \text{ ou } \big(P \text{ ou } Q\big) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(non\, P \text{ ou } P}_{\text{tautologie}} \text{ ou } Q)$

Toujours vraie

4. $P \Rightarrow (P \text{ et } Q) \quad \Leftrightarrow \quad non\, P \text{ ou } \big(P \text{ et } Q\big) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(non\, P \text{ ou } P)}_{\text{tautologie}} \text{ et } (non\, P \text{ ou } Q) \quad \Leftrightarrow (non\, P \text{ ou } Q)$

Faux si P est vraie et Q est fausse.

5. identique à **3.**

6. $(P \text{ et } Q) \Rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad (non\, P \text{ ou } non\, Q) \text{ ou } Q \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(non\, Q \text{ ou } Q}_{\text{tautologie}} \text{ ou } non\, P)$

Toujours vraie.

Exercice A.2.16

1. Utiliser les deux équivalences vues en cours :

$$\boxed{\big(P \Rightarrow Q\big) \Leftrightarrow \big((\text{non}\,P) \text{ ou } Q\big)} \quad \text{et} \quad \boxed{\big(P \Rightarrow Q\big) \Leftrightarrow \big(\text{non}\,Q \Rightarrow \text{non}\,P\big)}$$

On a donc

$$\big(P \text{ ou } Q\big) \Leftrightarrow \big(\text{non}(\text{non}\,P) \text{ ou } Q\big) \Leftrightarrow \big(\text{non}\,P \Rightarrow Q\big) \Leftrightarrow \big(\text{non}\,Q \Rightarrow \text{non}(\text{non}\,P)\big) \Leftrightarrow \big(\text{non}\,Q \Rightarrow\ P\big)$$

2. On pose $P :=$« $x^5 - x^4 + x^2 + 3 > 0$ » et $Q :=$« $x < 2$ » .
D'après la question **1.**, montrer que la proposition $(P \text{ ou } Q)$ est vraie est équivalent à montrer que la proposition $((\text{non}\,Q) \Rightarrow P)$ est vraie.
preuve : On suppose $x \geq 2$. On a

$$x^5 - x^4 + x^2 + 3 = x^4(x-1) + x^2 + 3\,.$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x - 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow x^4(x-1) > 0$$

et

$$x \geq 2 \Rightarrow x^2 + 3 > 0$$

Grâce à la compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition, on en déduit que $x^5 - x^4 + x^2 + 3 > 0$.
conclusion : L'implication $((\text{non}\,Q) \Rightarrow P)$ est vraie donc la proposition $(P \text{ ou } Q)$ est vraie.

Exercice A.2.1 : Réécrire ces phrases avec quantificateurs avant d'écrire la négation.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 2$ ou $g(x) \neq 0$.

2. $\exists n \in \mathbb{Z},\ n > 0$ et $n \leq 0$.

3. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \leq 1$.

4. $(\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \neq 1)$ ou $\left(\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \neq x_2 \text{ et } e^{x_1} = 1 = e^{x_2}\right)$.

5. $x \geq 0$ et $\sqrt{x}$ n'existe pas. (Insister sur le fait qu'on n'utilise pas le symbole $\nexists$ ici).

6. $n \in \mathbb{N}^*$ et $n^3 - n$ n'est pas un multiple de 3.

Exercice A.2.4 :

1. $\exists\, x \in E,\ \exists\, y \in E,\ \big(x \neq y \text{ et } f(x) = f(y)\big)$.

2. $\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in E,\ \big(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\big)$.

3. $\exists\, x \in E,\ \exists\, y \in E,\ \big(f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y\big)$.

4. Les deux propositions sont identiques.

Exercice A.2.25 :

1. Vrai. En effet, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists y = -x \in \mathbb{R},\ x + y = 0.$

2. Faux car la négation est vraie. En effet, $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists x = -y + 1 \in \mathbb{R},\ x + y = 1 \neq 0$

3. Faux car la négation est vraie. En effet, $\exists\, x = 0 \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ xy \neq 1$

4. Faux car la négation est vraie. En effet, $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x = 0 \in \mathbb{R},\ xy = 0 \neq 1$

5. Vrai. En effet, $\exists\, y = 0 \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x + y = x + 0 \neq x$. La valeur $y = 0$ est appelée élément neutre pour l'addition (cf MT03).

Exercice A.2.3 : On doit chercher le seul sous-ensemble A de E pour lequel l'implication suivante est fausse

$$\forall\, x \in A,\ P(x) \quad \Rightarrow \quad \exists\, x \in A,\ P(x).$$

Cela signifie que nous devons chercher $A \subset E$ pour lequel la négation de cette implication est vraie :

$$(\forall\, x \in A,\ P(x)) \quad \text{et} \quad (\forall\, x \in A, \text{non}\, P(x))$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in A,\ \big(P(x) \text{ et non}\, P(x)\big)$$

Puisque la proposition $\big(P(x) \text{ et non}\, P(x)\big)$ est absurde, on en déduit qu'il n'y a aucun élément $x \in E$ satisfaisant cette proposition. Cela se traduit par $A = \varnothing$.

Exercice A.2.27 : Pour toute application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on pose

$$K_f=\{x\in\mathbb{R},\ f(x)=0\}\quad \text{et}\quad I_f=\{y\in\mathbb{R},\exists\, x\in\mathbb{R},\ y=f(x)\}.$$

On note E l'ensemble des applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Il faut comprendre que :
Le symbole $\{\cdots\}$ signifie *l'ensemble de* .
K_f est l'ensemble des solutions x dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=0$.
I_f est l'ensemble des images par f ou encore $I_f=\mathrm{Im} f=f(\mathbb{R})$.

1. • La proposition "$\forall\, f\in E, K_f\neq\varnothing$" est fausse car sa négation "$\exists\, f\in E, K_f=\varnothing$" est vraie. Un exemple est la fonction constante suivante :

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&1\end{array}$$

• La proposition "$\forall\, f\in E, I_f\neq\varnothing$" est vraie par définition d'une application. En effet, si $f\in E$ alors

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\exists\, y\in\mathbb{R},\ y=f(x)\ \Rightarrow\ \exists\, x\in\mathbb{R},\exists\, y\in\mathbb{R},\ y=f(x)\ \Rightarrow\ \exists\, y\in\mathbb{R},\exists\, x\in\mathbb{R},\ y=f(x)\ \Rightarrow\ I_f\neq\varnothing.$$

2. Soient $f,\ g\in E$ telles que $f(0)=g(0)=0$.

(a) Par hypothèse, $0\in K_f$ et $0\in I_g$ donc $0\in K_f\cap I_g$. On vient de démontrer $K_f\cap I_g\neq\varnothing$.

(b) On doit montrer l'implication $x\in K_g\Rightarrow x\in K_{f\circ g}$.
Soit $x\in K_g$. Alors $g(x)=0$. On calcule $f\circ g(x)=f(g(x))=f(0)=0$. Cela signifie que $x\in K_{f\circ g}$. On vient de démontrer l'inclusion $K_g\subset K_{f\circ g}$.

(c) On doit montrer l'implication $K_f\cap I_g=\{0\}\Rightarrow K_g=K_{f\circ g}$.
<u>hypothèse :</u> $K_f\cap I_g=\{0\}$.
Cela signifie que le seul réel y appartement à la fois à K_f et I_g est $y=0$.
<u>but :</u> $K_g=K_{f\circ g}$.
D'après (b), on sait que $K_g\subset K_{f\circ g}$. On doit montrer l'inclusion réciproque $K_{f\circ g}\subset K_g$.
Plus précisément, sous l'hypothèse "$K_g\cap I_f=\{0\}$", on doit montrer l'implication $x\in K_{f\circ g}\Rightarrow x\in K_g$.
Soit $x\in K_{f\circ g}$ Alors $f\circ g(x)=f(g(x))=0$.
On pose $y=g(x)$. On a évidemment $y\in I_g$. De plus $f(y)=0$ donc $y\in K_f$.
Finalement $y\in K_f\cap I_g$. D'après l'hypothèse, $y=0$.
Or $y=g(x)$ donc $g(x)=0$ et on en déduit que $x\in K_g$.
On vient de démontrer l'inclusion $K_g\subset K_{f\circ g}$. D'après (b), on conclut l'égalité $K_g=K_{f\circ g}$.

3. Soient $f,\ g\in E$.

(a) On doit montrer l'implication $y\in I_{f\circ g}\Rightarrow y\in I_f$.
Soit $y\in I_{f\circ g}$. Alors $\exists\, x\in\mathbb{R},\ y=f\circ g(x)=f(g(x))$. On pose $x'=g(x)$. Alors $y=f(x')$ et $x'\in\mathbb{R}$. Donc $y\in I_f$. On vient de démontrer l'inclusion $I_{f\circ g}\subset I_f$.

(b) On doit montrer l'implication $I_g=\mathbb{R}\Rightarrow I_{f\circ g}=I_f$.
<u>hypothèse :</u> $I_g=\mathbb{R}$.
Cela signifie que $\forall\, y\in\mathbb{R},\exists\, x\in\mathbb{R},\ y=g(x)$.
<u>but :</u> $I_{f\circ g}=I_f$.
D'après (a), on sait que $I_{f\circ g}\subset I_f$. On doit montrer l'inclusion réciproque $I_f\subset I_{f\circ g}$.
Plus précisément, sous l'hypothèse "$I_g=\mathbb{R}$", on doit montrer l'implication $z\in I_f\Rightarrow z\in I_{f\circ g}$.
Soit $z\in I_f$. Alors $\exists\, y\in\mathbb{R},\ z=f(y)$.
Par hypothèse, $\exists\, x\in\mathbb{R},\ y=g(x)$.
Par composition, on peut écrire $z=f(g(x))=f\circ g(x)$. Donc $z\in I_{f\circ g}$.
On vient de démontrer $I_{f\circ g}\subset I_f$. D'après (a), on conclut l'égalité $I_{f\circ g}=I_f$.

Exercice A.2.18 : Respecter le symbole "supérieur stricte".

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on énonce la phrase $P(n)$:=« $2^n > n$ ».

Initialisation à $n = 0$. $2^n = 2^0 = 1 > n = 0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Pour $n \geq n_0$ fixé, on montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

correction. $2^{n+1} = 2^n + 2^n$. Par hypothèse de récurrence, $2^n > n$ donc on a $2^{n+1} > 2n$. Pour conclure, on utlise la résultat $n \geq 1 \Leftrightarrow 2n \geq n+1$. En concaténant les résultats on aboutit à $2^{n+1} > n+1$.

On a donc démontré l'hérédité pour $n \geq n_0 = 1$. Nous devons donc vérifier $P(1)$ est vraie également.

Initialisation à $n = 1$. $2^n = 2^1 = 2 > n = 1$ donc $P(1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Exercice A.2.19.

1. Hérédité de $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \geq 0$. On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
On suppose que $P(n)$:=« le nombre $A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7 » est vraie.

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 3^{2(n+1)+2} - 2^{(n+1)+1} = 3^2 \times 3^{2n+2} - 2^1 \times 2^{n+1} \\ &= 9 \times 3^{2n+2} - 2 \times 2^{n+1} = \underbrace{7 \times 3^{2n+2}}_{\text{divisible par 7}} + 2(3^{2n+2} - 2^{n+1}). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, le nombre $(3^{2n+2} - 2^{n+1})$ est divisible par 7 donc A_{n+1} aussi.

Hérédité de $(Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \geq 0$. On montre que $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$.
On suppose que $Q(n)$:=« le nombre $B_n = 3^{2n+2} + 2^{n+1}$ est divisible par 7 » est vraie.

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= 3^{2(n+1)+2} + 2^{(n+1)+1} = 3^2 \times 3^{2n+2} + 2^1 \times 2^{n+1} \\ &= 9 \times 3^{2n+2} + 2 \times 2^{n+1} = \underbrace{7 \times 3^{2n+2}}_{\text{divisible par 7}} + 2(3^{2n+2} + 2^{n+1}). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, le nombre $(3^{2n+2} + 2^{n+1})$ est divisible par 7 donc B_{n+1} aussi.

2. Oui avec $n_0 = 0$. On vérife que $P(0)$ est vraie.

$$A_0 = 3^2 - 2^1 = 9 - 2 = 7.$$

3. Non, il n'existe aucune valeur $n_0 \in \mathbb{N}$ pour initialiser la récurrence.
On peut affirmer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, non $Q(n)$. On raisonne par l'absurde.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ est vraie. Alors A_n et B_n sont tous deux divisible par 7. La différence $B_n - A_n$ est donc divisible par 7 :

$$\exists\, k \in \mathbb{N},\ B_n - A_n = 2 \times 2^{n+1} = 7k.$$

Ceci est absurde car 2 est le seul diviseur premier de $B_n - A_n$.
La négation est fausse donc la phrase $\forall\, n \in \mathbb{N}$, non $Q(n)$ est vraie.

Exercice A.2.13 : À faire par double implication

1. On montre tout d'abord que $\quad n$ impair et p impair $\Rightarrow \quad np$ impair.

dém : Soit $n = 2k+1$ et $p = 2k'+1$ avec $kk' \in \mathbb{N}$. Alors,

$$np = (2k+1)(2k'+1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1 = 2q + 1 \quad \text{avec } q = 2kk' + k + k' \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que np est impair.

2. Pour l'implication réciproque $\quad np$ impair $\Rightarrow \quad n$ impair et p impair , on montre plutôt la contraposée

$$n \text{ pair ou } p \text{ pair } \Rightarrow np \text{ pair.}$$

dém : On démontre tout d'abord que n pair $\Rightarrow np$ pair. Soit $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors,

$$np = 2k \times p = 2kp = 2q \quad \text{avec } q = kp \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que np est pair.

Par symétrie (entre n et p), la proposition p pair $\Rightarrow np$ pair est également vraie.

3. L'équivalence est démontrée.

Exercice A.2.14 :

1. Procéder comme au A.2.16

$$\big(P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)\big) \Leftrightarrow \big(\text{non} P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)\big)$$

$$\big((P \text{ et non} Q) \Rightarrow R\big) \Leftrightarrow \big(\text{non}(P \text{ et non} Q) \text{ ou } R\big) \Leftrightarrow \big(\text{non} P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)\big)$$

Les deux propositions sont bien équivalentes.

2. Utiliser le résultat de l'exercice A.2.13.
La phrase est équivalente à

$$n, p \in \mathbb{Z}, \text{ et } np \text{ est impair } \Rightarrow n^2 - p^2 \text{ est un multiple de 8.}$$

correction : soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que np est impair. Alors, n et p sont deux nombres impairs. On écrit $n = 2k+1$ et $p = 2k'+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$. On calcule

$$n^2 - p^2 = (n+p)(n-p) = (2k+2k'+2)(2k-2k') = 4(k+k'+1)(k-k').$$

Les nombres $k+k'+1$ et $k-k'$ sont de parités contraires car leur différence est impaire. L'un de ces deux nombres est forcément pair et leur produit aussi. Finalement $n^2 - p^2$ est bien un multiple de 8.

Exercice A.2.23.

1. $P := \exists (i,j) \in [\![0,n]\!],\ i \neq j$ et $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}$.

2. $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!],\ i = j$ ou $|x_i - x_j| > \frac{1}{n}$.

3. On montre que $non\,P$ est fausse :
On sait que $0 \leq x_0 \leq x_n \leq 1$ donc $x_n - x_0 \leq 1$.
Ensuite on décompose la différence $x_n - x_0$ comme suit

$$x_n - x_0 = \underbrace{(x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)}_{\text{il y a bien } n \text{ termes}}$$

D'après le **2.** on obtient

$$x_n - x_0 > n \times \frac{1}{n} = 1.$$

On a $\boxed{x_n - x_0 \leq 1}$ et $\boxed{x_n - x_0 > 1}$ ce qui est absurde.
La négation est fausse donc la proposition P est vraie.

Exercice A.2.20.

1. Avec schéma, on conjecture que $B \subset C$.

2. Pour démontrer une inclusion, on démontre l'implication $\boxed{x \in B \Rightarrow x \in C}$.
Les hypothèses sont ① $(A \cap B) \subset (A \cap C)$ et ② $(A \cup B) \subset (A \cup C)$.

$$x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B) \underset{②}{\Rightarrow} x \in A \cup C \Rightarrow (x \in A) \text{ ou } (x \in C)$$

On continue par disjoinction de cas :
• Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B$. D'après ①, alors $x \in A \cap C \subset C$.
• Si $x \in C$, la démonstration est finie.
Conclusion : On a bien $B \subset C$.

Exercice A.2.22.

1.

$$\begin{aligned}(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D) &\Leftrightarrow (x,y)\in A\times C \text{ et } (x,y)\in B\times D\\ &\Leftrightarrow x\in A \text{ et } y\in C \text{ et } x\in B \text{ et } y\in D\\ &\Leftrightarrow x\in A\cap B \text{ et } y\in C\cap D\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)\end{aligned}$$

2. Non. Raisonner dans $E=F=\mathbb{R}$.
Prenons $A=C=\{0\}$, $B=D=\{1\}$. On a

$$(A\times C)\cup(B\times D)=\{(0,0);(1,1)\},$$

$$(A\cup B)\times(C\cup D)=\{(0,0);(1;1);(0,1);(1;0)\}.$$