Chapitre 2. Corrigé des exercices.

Exercice A.2.7.

1. On rappelle que
$$X_B = \{x \in E;\ f(x) \in B\}$$
et
$$f(X_B) = \{y \in F;\ \exists\, x \in X_B,\ y = f(x)\}.$$

(a) Montrer $\boxed{y \in f(X_B) \Rightarrow y \in B}$.
Soit $y \in f(X_B)$. Alors $\exists\, x \in X_B,\ y = f(x)$.
Or $x \in X_B \Rightarrow f(x) \in B$. Donc $y = f(x) \in B$.
On a montré que $f(X_B) \subset B$.

(b) Contre-exemple : avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ x \mapsto f(x) = x^2$
$$\Big(B = [-1,1] \quad \Rightarrow \quad X_B = [-1,1] \quad \Rightarrow \quad f(X_B) = [0,1] \text{ et } B \not\subset f(X_B)\Big).$$

(c) On suppose que f est surjective et on doit démontrer l'inclusion réciproque $B \subset f(X_B)$.
C'est-à-dire montrer que $\boxed{y \in B \Rightarrow y \in f(X_B)}$.
Soit $y \in B$. Comme f est surjective, $\exists\, x \in E,\ y = f(x)$. Donc $x \in X_B$ car $f(x) \in B$.
Par définition, $y \in f(X_B)$.

2. On rappelle que
$$f(A) = \{y \in F;\ \exists\, x \in A\,,\ y = f(x)\}$$
et
$$X_{f(A)} = \{x \in E;\ f(x) \in f(A)\}.$$

(a) montrer que $\boxed{x \in A \Rightarrow x \in X_{f(A)}}$.
Soit $x \in A \subset E$. Alors $f(x) \in f(A)$. Par définition de $X_{f(A)}$, on a $x \in X_{f(A)}$.

(b) Contre-exemple : avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ x \mapsto f(x) = x^2$
$$\Big(A = [0,1] \quad \Rightarrow \quad f(A) = [0,1] \quad \Rightarrow \quad X_{f(A)} = [-1,1] \not\subset A\Big).$$

(c) On suppose f injective et on doit montrer l'inclusion réciproque $X_{f(A)} \subset A$.
C'est-à-dire montrer que $\boxed{x \in X_{f(A)} \Rightarrow x \in A}$.
Soit $x \in X_{f(A)}$ alors $x \in E$ et $f(x) \in f(A)$.
Par définition de $f(A)$, il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$.
Comme f est injective, on déduit que $x = x'$ et $x \in A$.