Exercice A.2.1 : Il faut démontrer la proposition suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow |u_n - \tfrac{1}{2}| > \varepsilon).$$

On suit la méthodologie vue en cours : Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

(i) On simplifie, si possible, l'expression $|u_n - \frac{1}{2}|$:

$$|u_n - \tfrac{1}{2}| = |\tfrac{n-1}{2n} - \tfrac{1}{2}| = |\tfrac{(n-1)-n}{2n}| = |\tfrac{-1}{2n}| = \tfrac{1}{2n}.$$

(ii) On résout (par équivalence) l'inégalité $|u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ d'inconnue n.

$$|u_n - \tfrac{1}{2}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2\varepsilon} < n \ .$$

(iii) On conclut : On pose $N = E(\frac{1}{2\varepsilon}) + 1$. On a bien

$$n > N \Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow |u_n - \tfrac{1}{2}| < \varepsilon$$

La définition avec quantificateurs est démontrée.

Exercice A.2.4 : À faire !
On n'utilise pas la définition avec quantificateurs ici.

(i) $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$. On utilise le premier corollaire du théorème des gendarmes puisque

$$\forall\, n \geq 1,\ |u_n| \leq \frac{1}{n}$$

Or, $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc la suite (u_n) converge vers 0 également.

(ii) Le terme général est indéterminé. On applique la méthode du conjugué pour les racines :

$$u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \times \frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$$

L'expression obtenue n'est plus indéterminée : $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 (= \frac{1}{+\infty})$.

(iii) On peut montrer que la suite (u_n) converge en étudiant les variations de (u_n). On a $u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(1 + \frac{1}{n})$. Comme ln est une fonction croissante, on a

$$n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \ln(1 + \tfrac{1}{n}) > \ln(1 + \tfrac{1}{n+1}) \Rightarrow u_n > u_{n+1}$$

La suite u_n est strictement décroissante. De plus elle est minorée par 0 car

$$1 + \frac{1}{n} > 1 \quad \Rightarrow \quad u_n = \ln(1 + \tfrac{1}{n}) > \ln 1 = 0.$$

Toute suite décroissante et minorée converge.

Cependant pour trouver la valeur de la limite, nous avons besoin de la continuité de la fonction ln. Si $1 + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$ alors $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\to} \ln 1 = 0$.

(iv) On remarque que $0 \leq a < b \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{a}{b} < 1$. Ainsi on fait apparaître la suite géométrique $\left((\frac{a}{b})^n\right)_{n\geq 0}$ dans le terme général de u_n :

$$u_n = \frac{a^n + b^n}{a^n - b^n} = \frac{b^n}{b^n} \times \frac{\frac{a^n}{b^n} + 1}{\frac{a^n}{b^n} - 1} = \frac{(\frac{a}{b})^n + 1}{(\frac{a}{b})^n - 1}$$

Comme, $0 \leq \frac{a}{b} < 1 \quad \Rightarrow \quad (\frac{a}{b})^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, on en déduit que la suite (u_n) converge et tend vers -1.

(v) On connait l'expression explicite de $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. On peut utiliser le théorème de comparaison à l'infini : comme $\forall\, n \geq 0,\ u_n \geq n$, on a

$$n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty.$$

(vi) Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. On calcule alors le terme général :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{5}\right)^k = 1 + \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{5}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

Comme $|-\frac{1}{5}| < 1$ on a $\left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. La suite converge vers $\frac{5}{6}$.

(vii) On rappelle que $n!$ est le factoriel de n et correspond au produit des n premiers entiers (en commençant par 1 biensûr) :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

On réécrit alors u_n comme un produit de n fractions :

$$u_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n}{n \times n \times n \times \cdots \times n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n}.$$

On remarque alors que les numérateurs sont toujours inférieurs ou égaux au dénominateurs puisqu'il s'agit des entiers plus petit que n. On a donc

$$u_n = \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n}}_{\leq 1}$$

On conclut avec le théorème des gendarmes : comme $\forall\, n \geq 1, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$, on a

$$\frac{1}{n} \underset{\to\infty}{\to} 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{\to\infty}{\to} 0.$$

(viii) On procède comme au (vi). On réécrit u_n comme un produit de n fractions :

$$u_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{n-1} \times \frac{2}{n}.$$

Exceptée la première fraction, les dénominateurs sont toujours supérieurs ou égaux au numénateurs puisqu'il s'agit des entiers compris entre 2 et n. On a donc

$$u_n = \frac{2}{1} \times \underbrace{\frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{n-1}}_{\leq 1} \times \frac{2}{n}$$

On conclut avec le théorème des gendarmes : comme $\forall\, n \geq 1, 0 \leq u_n \leq \frac{4}{n}$, on a

$$\frac{4}{n} \underset{\to\infty}{\to} 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{\to\infty}{\to} 0.$$

(ix) Il s'agit du produit des deux précédentes suites :

$$u_n = \frac{2^n}{n^n} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{2^n}{n!}.$$

D'après les opérations sur les limites des suites convergentes, on en déduit que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.