

**Exercice A.2.1** : Il faut démontrer la proposition suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow |u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon).$$

On suit la méthodologie vue en cours : Soit  $\varepsilon > 0$  fixé.

(i) On simplifie, si possible, l'expression  $|u_n - \frac{1}{2}|$  :

$$|u_n - \frac{1}{2}| = |\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}| = |\frac{(n-1)-n}{2n}| = |\frac{-1}{2n}| = \frac{1}{2n}.$$

(ii) On résout (par équivalence) l'inégalité  $|u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$  d'inconnue  $n$ .

$$|u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2\varepsilon} < n.$$

(iii) On conclut : On pose  $N = E(\frac{1}{2\varepsilon}) + 1$ . On a bien

$$n > N \Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow |u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$$

La définition avec quantificateurs est démontrée.

**Exercice A.2.4 : À faire !**

On n'utilise pas la définition avec quantificateurs ici.

- (i)  $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$ . On utilise le premier corollaire du théorème des gendarmes puisque

$$\forall n \geq 1, |u_n| \leq \frac{1}{n}$$

Or,  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  donc la suite  $(u_n)$  converge vers 0 également.

- (ii) Le terme général est indéterminé. On applique la méthode du conjugué pour les racines :

$$u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

L'expression obtenue n'est plus indéterminée :  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 (= \frac{1}{+\infty})$ .

- (iii) On peut montrer que la suite  $(u_n)$  converge en étudiant les variations de  $(u_n)$ . On a  $u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(1 + \frac{1}{n})$ . Comme  $\ln$  est une fonction croissante, on a

$$n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \ln(1 + \frac{1}{n}) > \ln(1 + \frac{1}{n+1}) \Rightarrow u_n > u_{n+1}$$

La suite  $u_n$  est strictement décroissante. De plus elle est minorée par 0 car

$$1 + \frac{1}{n} > 1 \Rightarrow u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) > \ln 1 = 0.$$

Toute suite décroissante et minorée converge.

Cependant pour trouver la valeur de la limite, nous avons besoin de la continuité de la fonction  $\ln$ . Si  $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  alors  $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 1 = 0$ .

- (iv) On remarque que  $0 \leq a < b \Rightarrow 0 \leq \frac{a}{b} < 1$ . Ainsi on fait apparaître la suite géométrique  $(\frac{a}{b})^n_{n \geq 0}$  dans le terme général de  $u_n$  :

$$u_n = \frac{a^n + b^n}{a^n - b^n} = \frac{b^n}{b^n} \times \frac{\frac{a^n}{b^n} + 1}{\frac{a^n}{b^n} - 1} = \frac{(\frac{a}{b})^n + 1}{(\frac{a}{b})^n - 1}$$

Comme,  $0 \leq \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow (\frac{a}{b})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , on en déduit que la suite  $(u_n)$  converge et tend vers  $-1$ .

- (v) On connaît l'expression explicite de  $u_n = \sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . On peut utiliser le théorème de comparaison à l'infini : comme  $\forall n \geq 0, u_n \geq n$ , on a

$$n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \Rightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

- (vi) Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique :  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ . On calcule alors le terme général :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{5}\right)^k = 1 + \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{5}{6} \left(1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

Comme  $|\frac{1}{5}| < 1$  on a  $\left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . La suite converge vers  $\frac{5}{6}$ .