Exercice A.2.4 : On n'utilise pas la définition avec quantificateurs ici.

(i) $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$. On utilise le premier corollaire du théorème des gendarmes puisque

$$\forall\, n \geq 1,\ |u_n| \leq \frac{1}{n}$$

Or, $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ donc la suite (u_n) converge vers 0 également.

(ii) Le terme général est indéterminé. On applique la méthode du conjugué pour les racines :

$$u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \times \frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$$

L'expression obtenue n'est plus indéterminée : $u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 (= \frac{1}{+\infty})$.

(iii) On peut montrer que la suite (u_n) converge en étudiant les variations de (u_n). On a $u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(1 + \frac{1}{n})$. Comme ln est une fonction croissante, on a

$$n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \ln(1+\tfrac{1}{n}) > \ln(1 + \tfrac{1}{n+1}) \Rightarrow u_n > u_{n+1}$$

La suite u_n est strictement décroissante. De plus elle est minorée par 0 car

$$1 + \frac{1}{n} > 1 \quad \Rightarrow \quad u_n = \ln(1 + \tfrac{1}{n}) > \ln 1 = 0.$$

Toute suite décroissante et minorée converge.

Cependant pour trouver la valeur de la limite, nous avons besoin de la continuité de la fonction ln. Si $1 + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 1$ alors $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \ln 1 = 0$.

(iv) On remarque que $0 \leq a < b \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{a}{b} < 1$. Ainsi on fait apparaître la suite géométrique $\left((\frac{a}{b})^n\right)_{n\geq 0}$ dans le terme général de u_n :

$$u_n = \frac{a^n + b^n}{a^n - b^n} = \frac{b^n}{b^n} \times \frac{\frac{a^n}{b^n} + 1}{\frac{a^n}{b^n} - 1} = \frac{(\frac{a}{b})^n + 1}{(\frac{a}{b})^n - 1}$$

Comme, $0 \leq \frac{a}{b} < 1 \quad \Rightarrow \quad (\frac{a}{b})^n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, on en déduit que la suite (u_n) converge et tend vers -1.

(v) On connait l'expression explicite de $u_n = \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. On peut utiliser le théorème de comparaison à l'infini : comme $\forall\, n \geq 0,\ u_n \geq n$, on a

$$n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} +\infty \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} +\infty.$$

(vi) Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. On calcule alors le terme général :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{5}\right)^k = 1 + \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{5}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

Comme $|-\frac{1}{5}| < 1$ on a $\left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$. La suite converge vers $\frac{5}{6}$.

Exercice A.2.17 Dans cet trois questions, on cherche un équivalent au terme général de chaque série sous la forme $\dfrac{\lambda}{n^\alpha}$ et on conclut.

(i) Le terme général est équivalent à $\frac{(2n)^4}{(3n^2)^3} = \frac{16n^4}{27n^6} = \frac{16}{27n^2}$. La série est convergente.

(iii) Mettre au meme dénomiteur et appliquer la méthode du conjugué :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \times \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n} \times \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

La série est convergente.

(v) On utilise la limite connue $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$. Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, on en déduit par composition de limite que $\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, donc $\sin(\frac{1}{n})$ est équivalent à $\frac{1}{n}$. Le terme général est équivalent à $\frac{1}{n^2}$. La série est convergente.

Exercice A.2.12 - Question 1 : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad u_n = u_n + \frac{1}{nn!}\ .$$

<u>Indications</u> : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$ et $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

(i) Montrons que (v_n) est croissante :

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0\ .$$

(ii) Montrons que (u_n) est décroissante :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = v_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - (v_n + \frac{1}{nn!}) &= (v_{n+1} - v_n) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n!}\frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n!}\frac{-1}{n(n+1)^2} < 0\ . \end{aligned}$$

(iii) Montrons que $(u_n - v_n)$ converge vers 0 :

$$u_n - v_n = \frac{1}{nn!} \Rightarrow 0 < u_n - v_n = \frac{1}{nn!} \leq \frac{1}{n} \quad \text{car } n! \geq 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

<u>Conclusion</u> : les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et elles convergent vers la même limite.

Complément : la limite de ces deux suites est le nombre irrationnel $e \approx 2.718\ldots$ dont vous verrez une justification au chapitre 6.

Exercice A.2.9 du chapitre 2 : Dans cet exercice on utilise quelques outils du chapitre 3

1. On étudie l'ensemble $A := \{1 + \frac{(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$.
On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Pour déterminer l'existence de minorants/majorants, de plus grand élément/plus petit élément, borne inf/borne sup, il faut essayer d'ordonner les termes de la suites.

La présence de $(-1)^n$ dans la définition de u_n nous incite à travailler avec les suites extraites : $u_{2k} = 1 + \frac{(-1)^{2k}}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$ et $u_{2k+1} = 1 + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1}$. La suite (u_{2k}) est définie pour $k \geq 1$ et la suite (u_{2k+1}) est définie pour $k \geq 0$.

Comme la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est décroissante, il en va de même des suites de terme général $\frac{1}{2k}$ et $\frac{1}{2k+1}$. La suite $(u_{2k})_{k\geq 1}$ est donc décroissante et la suite $(u_{2k+1})_{k\geq 0}$ est croissante car la multiplication par -1 change le sens de variation. On résume cela par ces enchaînements d'inégalités

$$\cdots \leq u_{2k} \leq \cdots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$u_1 = 0 \leq u_3 = \frac{2}{3} \leq \cdots \leq u_{2k+1} \leq \cdots$$

Ce qui est intéressant est qu'on a

$$u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \geq 1 \qquad \text{et} \qquad u_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1} \leq 1$$

Donc on peut concaténer les inégalités successives comme suit

$$u_1 = 0 \leq u_3 = \frac{2}{3} \leq \cdots \leq u_{2k+1} \leq \cdots \leq 1 \leq \cdots \leq u_{2k} \leq \cdots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

On conclut que l'ensemble A admet un plus petit élément $\min A = u_1 = 0$ et un plus grand élément $\max A = u_2 = \frac{3}{2}$.
On sait aussi que lorsque $\min A$ et $\max A$ existent alors $\inf A = \min A$ et $\sup A = \max A$ existent aussi.

2. On étudie l'ensemble $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

On procède de la même façon. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = (-1) + \frac{1}{n}$.

La présence de $(-1)^n$ dans la définition de u_n nous incite à travailler avec les suites extraites : $u_{2k} = (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$ et $u_{2k+1} = (-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1}$. La suite (u_{2k}) est définie pour $k \geq 1$ et la suite (u_{2k+1}) est définie pour $k \geq 0$.

La suite $(u_{2k})_{k\geq 1}$ est donc décroissante et la suite $(u_{2k+1})_{k\geq 0}$ est décroissante également. On résume cela par ces enchaînements d'inégalités

$$\cdots \leq u_{2k} \leq \cdots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\cdots \leq u_{2k+1} \leq \cdots \leq u_3 = -\frac{2}{3} \leq u_1 = 0$$

Ce qui est intéressant est qu'on a

$$u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \geq 1 \qquad \text{et} \qquad u_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \leq 0$$

Donc on peut concaténer les inégalités successives comme suit

$$\cdots \leq u_{2k+1} \leq \cdots \leq u_3 = -\frac{2}{3} \leq u_1 = 0 \leq 1 \leq \cdots \leq u_{2k} \leq \cdots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

On conclut que l'ensemble B admet un plus grand élément $\max B = u_2 = \frac{3}{2}$. On sait aussi que lorsque $\max B$ existe alors $\sup B = \max B$ existe aussi.

Pour la borne inf, c'est plus compliqué. On commence par justifier qu'elle existe :

$$n > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} > 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \geq (-1)^n \geq -1 \; .$$

L'ensemble B est minoré par -1 c'est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car $u_1 = 0 \in B$). d'après l'axiome de la borne inférieure $\inf B$ existe. Il faut avoir l'intuition que $\inf B = -1$ en étudiant les limites des suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}).

<u>Montrons que $\inf B = -1$</u> : pour ce faire il faut démontrer les deux caractérisations de la borne inférieure.

$$\begin{cases} 1)\ \forall x \in B,\ -1 \leq x \\ 2)\ \forall t > -1,\ \exists x \in B,\ x < t\ . \end{cases}$$

La première caractérisation 1) est déjà justifiée plus haut. Il reste à prouver la seconde.

<u>démonstration</u> : Soit $t > -1$. On cherche $x = u_n$ tel que $x < t$. Il suffit de résoudre cette inégalité d'inconnue n. Comme on sait que ce sont les termes d'indices impairs qui sont proches de -1, on peut poser $n = 2k + 1$.

$$u_{2k+1} < t \quad \Leftrightarrow \quad -1 + \frac{1}{2k+1} < t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{t+1} < 2k+1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - 1\right) < k$$

On pose $k = E\Big(\frac{1}{2}\big(\frac{1}{t+1} - 1\big)\Big) + 1$. On a bien $u_{2k+1} \in B$ et $-1 \leq u_{2k+1} < t$. La seconde caractérisation est bien démontrée.

NB : Notez que $t > -1 \Rightarrow t + 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{t+1} - 1 > -1 \Rightarrow k = E\Big(\frac{1}{2}\big(\frac{1}{t+1} - 1\big)\Big) + 1 \geq 0$. L'indice proposé est bien dans $\mathbb{N}$.

Exercice A.2.7 - Question 3 :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2}$. Nous allons étudier les suites récurrentes définies par le choix arbitraire de $u_0\in[0,+\infty[$ et de terme général défini par la relation $u_{n+1}=f(u_n)$.

(a) Comme indiqué en cours, commencez par rechercher les limites possibles d'une telle suite en résolvant l'équation

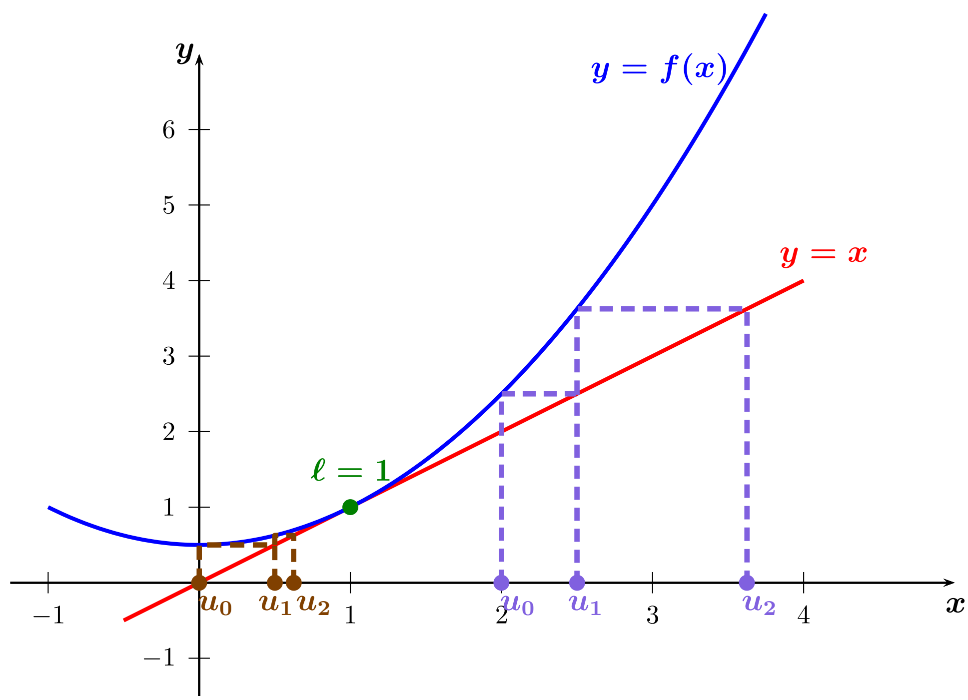
$$f(\ell)=\ell.$$

On a

$$f(x)=x\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{2}=x\Leftrightarrow x^2+1=2x\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow\boxed{x=1}.$$

La fonction admet donc un seul point fixe. On sait donc que **si la suite (u_n) converge alors sa seule limite possible est $\ell=1$**.

Pour la représentation graphique, on construit les premiers termes de plusieurs suites en choisissant u_0 de part et d'autres de la valeur $\ell=1$. Sur le schéma ci-dessous, on a choisi $\boldsymbol{u_0=0}$ puis $\boldsymbol{u_0=2}$.



Ceci fait, conjecturons tous les comportements possibles dans l'hypothèse où $u_0\geq 0$:

(i) Si $u_0\in[0,1[$, alors la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.

(ii) Si $u_0=1$ alors la suite u_n est constante.

(iii) Si $u_0>1$, alors la suite (u_n) est croissante et n'est pas majorée. Elle diverge vers $+\infty$.

(b) Démonstrations des conjectures :

(i) **Hypothèse** : $u_0\in[0,1[$.

• On montre par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n<1$

Initialisation à $n=0$: il s'agit de l'hypothèse sur u_0.

Hérédité : Soit $n\geq 0$ tel que $0\leq u_n<1$. On encadre pas à pas $u_{n+1}=\frac{u_n^2+1}{2}$:

$$0\leq u_n<1\Rightarrow 0\leq u_n^2<1\Rightarrow 2\leq u_n^2+1<2\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{u_n^2+1}{2}<1\Rightarrow 0\leq u_{n+1}<1.$$

Conclusion : L'initialisation et l'hérédité sont satisfaites donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n < 1$.
• On montrer que la suite (u_n) est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{u_n^2+1-2u_n}{2} = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geq 0.$$

• La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. On conclut donc que (u_n) converge. Comme sa limite ℓ doit être un point fixe de f, on en déduit que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} \ell = 1$.

(ii) **Hypothèse** : $u_0 = 1$.
• On montre par récurrence sur $n \geq 0$ que la suite (u_n) est constante.
Initialisation à $n = 0$: il s'agit de l'hypothèse sur u_0.
Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $u_n = 1$. On calcule alors $u_{n+1} = f(u_n) = f(1) = 1$.
Conclusion : L'initialisation et l'hérédité sont satisfaites donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.
• Toute suite constante converge. Sa limite est $\ell = u_0 = 1$.

(iii) **Hypothèse** : $u_0 \in\ ]1, +\infty[$.
• On sait que la suite (u_n) est croissante. En effet, l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ effectué plus haut reste valable.
• On montre par l'absurde que la suite diverge. (Pas facile à trouver soi-même mais la technique doit être mémorisée pour le final).
démonstration : Supposons que (u_n) converge. On sait alors que la suite converge vers $\ell = 1$ car c'est la seule limite possible. D'après le cours **proposition 3.1.4**, on sait que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell = 1}$.
Or, par hypothèse on a $u_0 > 1$ (supérieur stricte). Ceci est contradictoire avec la phrase encadrée pour $n = 0$.

La phrase "$1 < u_0 \leq 1$" est absurde.

La négation de "(u_n) converge " mène à une absurdité donc la proposition "(u_n) diverge" est vraie.
• On montre par l'absurde que la suite tend vers $+\infty$. (Pas facile à trouver soi-même mais la technique doit être mémorisée pour le final).
démonstration : On suppose que la suite (u_n) ne tend pas vers $+\infty$. On prend la négation de

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N \Rightarrow u_n > A). \qquad (\textbf{definition 3.1.2})$$

Cela donne

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ n > N \text{ et } u_n \leq A.$$

Comme la suite est croissante, on a $n > N \Rightarrow u_N \leq u_n$ donc la phrase devient

$$\boxed{\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, u_N \leq A.}$$

On peut alors en déduire que (u_n) est majorée.
Or, si (u_n) est majorée et croissante, le cours affirme que (u_n) converge. Ce qui est absurde car (u_n) diverge.
La négation de "(u_n) tend vers $+\infty$ " mène à une absurdité donc la proposition "(u_n) tend vers $+\infty$" est vraie.

Exercice A.2.16 Convergence absolue

Pour mieux comprendre, considérons la suite de premiers termes :

$$u_0 = -1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = \tfrac{1}{2}, \quad u_3 = -5, \quad u_4 = 3, \quad u_5 = -\tfrac{7}{2}, \quad \cdots$$

La définition des termes généraux v_n et w_n donne :

$$v_0 = 0, \quad v_1 = 2, \quad v_2 = \tfrac{1}{2}, \quad v_3 = 0, \quad v_4 = 3, \quad v_5 = 0, \quad \cdots$$

$$w_0 = -1, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = -5, \quad w_4 = 0, \quad w_5 = -\tfrac{7}{2}, \quad \cdots$$

On remarque alors que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n \geq 0,\ w_n \leq 0$ et $u_n = v_n + w_n$.

1.

$$S^+_{n+1} - S^+_n = v_{n+1} = \max(u_{n+1}, 0) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (S^+_n) \text{ est croissante}$$

$$S^-_{n+1} - S^-_n = w_{n+1} = \min(u_{n+1}, 0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (S^-_n) \text{ est décroissante}$$

2. Comme $S_n = S^+_n + S^-_n$, on montre que (S^+_n) et (S^-_n) sont convergentes. Comme elles sont monotones, il reste à justifier que (S^+_n) est majorée et (S^-_n) est minorée.
Par hypothèse $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge vers une limite ℓ. Comme il s'agit d'une suite croissante, on a $\forall\, n \geq 0,\ \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k| \leq \ell$.

$$v_n = \max(u_n, 0) \leq |u_n| \Rightarrow \quad S^+_n \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leq \ell$$

$$v_n = \min(u_n, 0) \geq -|u_n| \Rightarrow \quad S^-_n \geq -\sum_{k=0}^{n} |u_k| \geq -\ell$$

3. Pour montrer que (S_n) converge, il suffit de montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ. *(Ainsi, tous les termes de la suite convergent vers ℓ. Voir une preuve plus bas)*

(a) (S_{2n}) est décroissante

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} < 0.$$

(b) (S_{2n+1}) est croissante

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} > 0.$$

(c) $S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$

Cependant, d'après les règles de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ diverge.

<u>preuve :</u> de (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers $\ell \Rightarrow (S_n)$ converge vers ℓ également.

$$\text{Hypothèse 1 :} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \Big(n > N_1 \text{ et } n \text{ impair} \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\Big)$$

$$\text{Hypothèse 2 :} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \Big(n > N_2 \text{ et } n \text{ pair} \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\Big)$$

$$\text{Conclusion :} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \Big(n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\Big)$$