

## II Applications réciproques

### Definition

On appelle **application identité** de  $E$ , notée  $\text{id}_E$ , l'application définie de  $E$  dans  $E$  par  $\forall x \in E, \text{id}_E(x) = x$ .

### Proposition

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Alors  $f \circ \text{id}_E = \text{id}_F \circ f = f$ .

### Definition

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . On dit que l'application  $g$ , définie de  $F$  dans  $E$ , est l'**application réciproque de  $f$**  si les deux égalités suivantes sont satisfaites :

$$f \circ g = \text{id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \text{id}_E.$$

(Autrement dit,  $\forall x \in E, g(f(x)) = x$  et  $\forall y \in F, f(g(y)) = y$ .)

**Exemple** : étudier la fonction inverse.

### Proposition

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Si  $f$  admet une **application réciproque**  $g$ , alors  $g$  est **unique** et on note  $g = f^{-1}$ .

**Preuve.** en cours

## Proposition

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Alors

$f$  admet une application réciproque  $\Leftrightarrow f$  est bijective

**Preuve.** en cours

## Proposition

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Si  $f$  admet une application réciproque  $f^{-1}$  alors  $f^{-1}$  est bijective.

**Preuve.** en cours

⋮

## Proposition

Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications bijectives.

Alors la composée  $g \circ f$  est une application bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

**Preuve.** en cours

⋮



La réciproque «  $g \circ f$  bijective  $\Rightarrow f$  et  $g$  bijectives » **est fausse.**

Contre-exemple : voir Ex 3/b/.

## Exercice de cours de la section A.1

Pour une meilleure compréhension du cours, vous pouvez faire les exercices suivants :

- A.1.1 (juste  $f_3$ ), A.1.6 et A.1.11, A.1.8 et A.1.12 sur les applications.
- A.1.20, A.1.22, A.1.23, A.1.24, A.1.25 sur les majorants/+grand élément/sup etc...

Ces exercices sont à faire en dehors des TDs et avant les 3h de TDs qui suivent ce cours.