

II Extrema locaux

Definition (Extremum local)

Soit D une partie de \mathbb{R} et $f : x \in D \mapsto f(x)$ une application. Soit $x_0 \in D$.

- ① On dit que x_0 réalise un **minimum local** de f sur D si $\exists \eta > 0, \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D, f(x) \geq f(x_0)$.
- ② On dit que x_0 réalise un **maximum local** de f sur D si $\exists \eta > 0, \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D, f(x) \leq f(x_0)$.

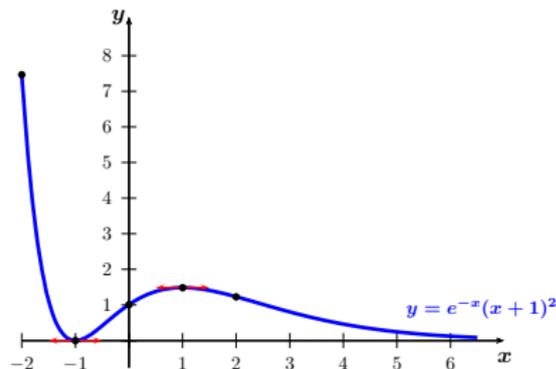
Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x}(x+1)^2$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	e^2	0	1	$4/e$	$9/e^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(x+1)^2 + 2e^{-x}(x+1) \\ &= e^{-x}[-(x+1)^2 + 2(x+1)] \\ &= e^{-x}[1-x^2] \\ &= e^{-x}(1-x)(x+1) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}x^2 = 0$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$				
$f'(x)$		-	0	+	0	-			
$f(x)$	$+\infty$	↘		0	↗		+	↘	0



Question : f admet-elle un extremum global sur Ω ? un extremum local sur Ω ?

① sur $\Omega = \mathbb{R}$

② sur $\Omega =]0, 2[$

③ sur $\Omega =]0, 2[$

 La nature de l'intervalle Ω influence les résultats !

Theorem (condition nécessaire d'optimalité locale)

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle ouvert** $\Omega =]a, b[$ avec $a < b$.
Si x^* réalise un minimum ou maximum local de f sur Ω alors $f'(x^*) = 0$.

preuve : dans le cas où x^* réalise un minimum local.

hypothèse : f est dérivable en $x^* \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x^*+h) - f(x^*)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x^*+h) - f(x^*)}{h} = f'(x^*)$.

but : on montre que $f'(x^*) \leq 0$ et $f'(x^*) \geq 0$.

dém :

 Le théorème est faux si Ω n'est pas ouvert.

contre-exemple : cf l'exemple précédent avec $\Omega = [0, 2]$,

⋮

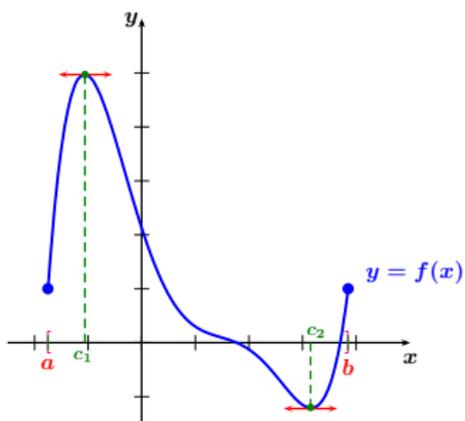
 La réciproque est fautive.

contre-exemple : $f(x) = x^3$ sur $\Omega = \mathbb{R}$ n'admet pas d'extrema locaux alors que $f'(0) = 0$.

III Formules des accroissements finis et applications

Theorem (théorème de Rolle)

Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivable sur $]a, b[$ tel que $f(a) = f(b)$. Alors, $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.



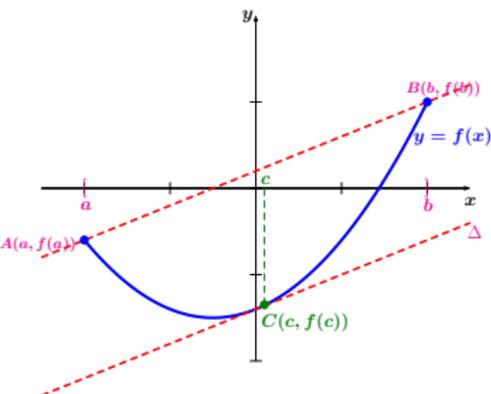
preuve :

Theorem (théorème des accroissements finis)

Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ ($a < b$).

Alors $\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

preuve : on applique le théorème de Rolle à la fonction φ définie sur $[a, b]$ par $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.



$$\Delta : y = f'(c)(x - c) + f(c)$$

$$(AB) : y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)$$

Les droites Δ et (AB) ont même coefficient directeur : elles sont parallèles.

A Caractérisation de la monotonie

Theorem (caractérisation de la monotonie)

Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors,

- f est croissante sur $[a, b]$ $\Leftrightarrow \forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$.

preuve : (\Rightarrow) Hyp : f est dérivable sur $]a, b[$ et croissante sur $[a, b]$

(\Leftarrow) Soit $(x_1, x_2) \in [a, b]^2$ tels que $x_1 < x_2$. On veut montrer que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Remarque : On a $\forall x \in]a, b[, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $[a, b]$

 **La réciproque est fautive !**

contre-exemple : $f(x) = x^3$ est strictement monotone et pourtant $\exists x = 0 \in \mathbb{R} , f'(x) = 0$.

Theorem (sous les mêmes hypothèses sur f . . .)

- f est décroissante sur $[a, b]$ $\Leftrightarrow \forall x \in]a, b[, f'(x) \leq 0$.
- f est constante sur $[a, b]$ $\Leftrightarrow \forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$.