V Opérations sur les ensembles.

Definition (Complémentaire)

Soit E un ensemble et A une partie de E. Le **complémentaire** de A dans E, noté $\complement_E A$, est défini par

$$\complement_E A = \{x \in E \ ; \ x \notin A\}.$$

Definition (Différence)

Soit E un ensemble et A et B deux partie de E. La **différence** de A et B, notée $A - B$ ou $A \backslash B$, est définie par

$$A \backslash B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \complement_E B$$

Propriété(s)

1. $\complement_E \left(\complement_E A \right) = \ \dots$
2. $\complement_E (A \cup B) = \ \dots$
3. $A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \dots$
4. $A \backslash A = \ \dots$
5. $\complement_E (A \cap B) = \ \dots$

Exercice. Montrer que $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

Definition

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice** (ou caractéristique) de A relativement à E, notée $\mathbb{1}_A$, la fonction numérique définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

En particulier,

1. $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_E(x) = 1,$
2. $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_\varnothing(x) = 0,$
3. $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_A(x).$

Proposition

Soit A et B deux parties d'un ensemble E quelconque. Alors,

1. $A = B \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B,$
2. $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B,$
3. $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B,$
4. $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B.$

Exercice. Exprimer l'indicatrice de $A \setminus (B \cup C)$ en fonction de $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$.