III Continuité d'une fonction

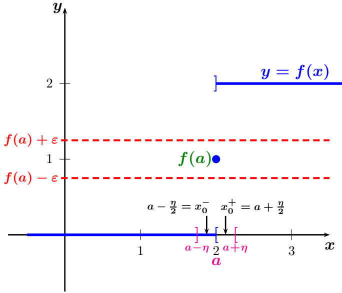
Definition

Soit Ω un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application définie sur Ω. On dit que f **est continue en** $a \in \Omega$ si

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall\, x \in \Omega,\ \left(|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\right)}.$$

Négation de la continuité : $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D_f, \left(|x-a| < \eta \quad \textbf{et} \quad |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon\right)$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.



Montrons, à l'aide de la définition, que f n'est pas continue en $a = 2$.

Remarque. On définit de la même façon la continuité à gauche *(avec $a - \eta < x \leqslant a$)* et la continuité à droite *(avec $a \leqslant x < a + \eta$)*.

Proposition (Résumé)

*Une fonction f est **continue** en $a \in D_f$ si et seulement si l'une ou l'autre des caractérisations suivantes est satisfaite :*

1. $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \quad \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{\ell = f(a)}.$
2. $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell \ \text{ et } \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell \quad \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{\ell = f(a)}.$

Theorem (caractérisation de la continuité à l'aide des suites)

(il suffit de poser $\ell = f(a)$ dans la caractérisation de la limite)

$$f \text{ est continue en } a \in D_f \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x_n),\ \left(x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in D_f \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a) \right)$$

NB : on peut intervertir le passage à la limite avec toute fonction continue en a

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} x_n \right)}$$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, appelée fonction de Dirichlet.

Montrer, à l'aide des suites, que f n'est ni continue à droite, ni continue à gauche en $a = 0$.

Correction. *en cours*

Theorem (somme/produit/quotient)

Soient f et g deux applications définies sur un intervalle I et continues en $a \in I$. Alors les applications (λf) (avec $\lambda \in \mathbb{R}$), $f+g$ et fg sont continues en a. De plus, si $\forall\, x \in I,\ g(x) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.

NB : ① On admet que toute fonction composée de fonctions usuelles à l'aide des opérations précédentes est continue sur son domaine de définition. *(exemples : $f(x) = x^2 + \cos(x)e^{\tan x}$ ou $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$.)*

② On note $f \in \mathscr{C}^0(I)$ si f est continue en tout point $a \in I$.

Theorem (composition)

Soit f une application définie sur un intervalle I et $a \in I$.
Soit g une autre application définie sur un intervalle J tel que $\operatorname{Im} f \subset J$.
On suppose que

1. *f est continue en a,*
2. *g est continue en $b = f(a)$.*

Alors la composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est une application définie sur I et continue en a.

Definition (prolongement par continuité en un point a)

Soit Ω un intervalle, $a \in \Omega$ et f une application continue sur $\Omega \backslash \{a\}$. On suppose que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a (càd $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell}$). Alors on peut définir une fonction notée $\tilde{f}$ sur Ω $(= \Omega \backslash \{a\} \cup \{a\})$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ ainsi construite est continue sur Ω. On dit que $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en a.

Exemple : On pose $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ sur $D_f =]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que f est prolongeable par continuité en $a = 0$ en une fonction $\tilde{f}$ à préciser.

Correction. *en cours.*