Triangle de Pascal - Binôme de Newton

Les coefficients $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k\times(k-1)\times\cdots\times 1}$, avec $0 \le k \le n$, sont appelés coefficients binômiaux et apparaissent également dans le développement du binôme de Newton $(a+b)^n$:

$$n=0 \quad (a+b)^0 = \boxed{1} = \binom{0}{0}$$

$$n=1 \quad (a+b)^1 = \boxed{1a+1b} = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

$$\begin{aligned} n=2 \quad (a+b)^2 &= \boxed{1a^2+2ab+1b^2} \\ &= \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=3 \quad (a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3 &= \boxed{1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3} \\ &= \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Ces coefficients s'obtiennent par récurrence en remplissant le triangle (rectangle) de Pascal ci-dessous:

n \ k	0	1	2	3	4	$\cdots$
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
$\vdots$						

$\binom{n}{k}$ est le coefficient situé à l'intersection de la ligne n et de la colonne k.

<u>Exemple</u>: $\binom{4}{2} = 6$.

On utilise les règles suivantes:

Initialisation: $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1 \Longrightarrow$ chaque ligne commence par un 1 et se termine par un 1

Hérédité: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \Longrightarrow$ On obtient les coefficients de la ligne $n+1$ à partir de la ligne n

<u>Exemple</u>: $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3+3 = 6$.

En utilisant la formule, on obtient aussi $\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4\times 3}{2\times 1} = 6$.

Exercice A.1.14 du chapitre 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la proposition

$$P(n) := \text{“ } (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ ”}.$$

<u>but:</u> Démontrer par récurrence sur n la proposition $\forall\, n \geq 0,\ P(n)$.

<u>preuve:</u>

(i) Initialisation à $n = 0$:

$$(a+b)^0 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

La proposition $P(0)$ est vraie.

(ii) Hérédité: Soit $n \geq 0$, on doit montrer l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

<u>hypothèse:</u> $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$

<u>but:</u> $(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \cdots + \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \cdots + \binom{n+1}{n} a b^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}$

<u>preuve:</u>

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \\
&= \left[\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \right] (a+b) \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n} a b^n \\
&\quad + \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0} \right] a^n b + \cdots + \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right] a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1}
\end{aligned}$$

On utilise le fait que

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

mais aussi

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \cdots + \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \cdots + \binom{n+1}{n} a b^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}$$

L'hérédité est démontrée pour $n \geq 0$.

(iii) Conclusion: $\forall\, n \geq 0,\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.