Chapitre 5. Exercice A.2.5

On utilise la définition d'une fonction f dérivable en un point $a \in \mathscr{D}_f$: la limite du taux d'accroissements existe.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \ .$$

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^0}{x-0} = \exp'(0) = 1$ car exp est dérivable en 0 et $\exp'(x) = e^x$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = 1$ car ln est dérivable en 1 et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = \ln'(1) = 1.$

4. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos x - \frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sin(\frac{\pi}{3})}{\cos x - \cos(\frac{\pi}{3})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sin(\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}} \frac{x-\frac{\pi}{3}}{\cos x - \cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sin'(\frac{\pi}{3})}{\cos'(\frac{\pi}{3})} = \frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{-\sin(\frac{\pi}{3})} =$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ car sin et cos sont dérivables en $\frac{\pi}{3}$ et $\cos'(\frac{\pi}{3}) \neq 0$.

5. On pose $f(x) = \sin(x-\frac{\pi}{3})$.

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{3})}{-2(\cos x - \cos(\frac{\pi}{3}))} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} -\frac{1}{2}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}} \frac{x-\frac{\pi}{3}}{\cos x - \cos(\frac{\pi}{3})} = -\frac{1}{2}\frac{f'(\frac{\pi}{3})}{\cos'(\frac{\pi}{3})} =$ $\displaystyle -\frac{1}{2}\frac{\cos(0)}{-\sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ car f et cos sont dérivables en $\frac{\pi}{3}$ et $f'(x) = \cos(x-\frac{\pi}{3})$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-e^0)-(e^{-x}-e^0)}{\sin x - \sin 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^0}{\sin x - \sin 0} - \frac{e^{-x}-e^0}{\sin x - \sin 0} = \frac{e^0}{\cos(0)} - \frac{-e^0}{\cos(0)} = 2$ car exp et sin sont dérivables en 0 et $\sin'(0) \neq 0$.

Exercice hors poly. Préciser le domaine de dérivabilité des fonctions f suivantes et calculer leur dérivées $f'(x)$.

① $f(x) = \dfrac{-2x^2+4x}{x^2+x+1}$ ③ $f(x) = (1-x)^3\sqrt{1+x}$ ⑤ $f(x) = e^{\sqrt{1+x^2}}$

② $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}}{x+1}$ ④ $f(x) = \dfrac{2}{(3x+5)^3}$ ⑥ $f(x) = \ln\sqrt{1-x^2}$

Puis, remplir le formulaire ci-dessous :

$f(x)$	$e^{u(x)}$	$\sqrt{u(x)}$	$\ln(u(x))$	$\ln\lvert u(x)\rvert$	$(u(x))^n$	$\dfrac{1}{(u(x))^n}$
$f'(x)$						

$f(x)$	$e^{u(x)}$	$\sqrt{u(x)}$	$\ln(u(x))$	$\ln\lvert u(x)\rvert$	$(u(x))^n$	$\dfrac{1}{(u(x))^n}$
$f'(x)$	$u'(x)\times e^{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$n\times u'(x)\times(u(x))^{n-1}$	$-n\times\dfrac{u'(x)}{(u(x))^{n+1}}$

① f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+x+1>0$ et

$$f'(x) = \frac{-6x^2-4x+4}{(x^2+x+1)^2}$$

② f est définie et dérivable sur $]-\frac{3}{2},+\infty[\backslash\{-1\}$ et

$$f'(x) = -\frac{x+2}{(x+1)^2\sqrt{2x+3}}.$$

③ f est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$f'(x) = -3(1-x)^2\sqrt{1+x}\ +\ (1-x)^3\times\frac{1}{2\sqrt{1+x}} = -\frac{(1-x)^2}{2\sqrt{1+x}}(5+7x).$$

④ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{5}{3}\}$ et

$$f'(x) = -\frac{18}{(3x+5)^4}$$

⑤ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\sqrt{1+x^2}}$$

⑥ f est définie et dérivable sur $]-1,1[$ et

$$f'(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

Exercice 1 - Final MT90 A15 Soit f la fonction définie sur $\Omega =]-\frac{\pi}{2};0[\cup]0;\frac{\pi}{2}[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}.$$

1. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{f}$ à préciser.
   Correction : On sait que la fonction f est continue sur $]-\frac{\pi}{2};0[\cup]0;\frac{\pi}{2}[$. Il faut montrer que la fonction f admet une limite finie en 0. On a
   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\ &= \frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{1+\cos x} \end{aligned}$$
   Les fonctions sin et cos sont continues en 0 donc $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\sin 0}{1+\cos 0} = \frac{0}{2} = 0$.
   On conclut que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en la fonction $\tilde{f}$ définie et continue sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ par
   $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. Montrer que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0, puis préciser la valeur de $\tilde{f}'(0)$.
   Correction : On doit montrer que le taux d'accroissement de la fonction $\tilde{f}$ en 0 admet une limite. On calcule :
   $$\frac{\tilde{f}(0+h)-\tilde{f}(0)}{h} = \frac{\frac{1-\cos h}{\sin h} - 0}{h} = \frac{1-\cos h}{h\sin h} = \frac{1-\cos h}{h\sin h} \times \frac{h}{h} = \frac{1-\cos h}{h^2} \times \frac{h}{\sin h}$$
   On utilise les résultats du cours : $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{h\to 0} \frac{h}{\sin h} = 1$ pour en déduire que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}(0+h)-\tilde{f}(0)}{h} = \frac{1}{2}$.

3. Justifier que $\tilde{f}$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, puis calculer $\tilde{f}'(x)$.
   Correction : On vient de montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0. Les fonctions sin et tan sont dérivables sur $]-\frac{\pi}{2};0[\cup]0;\frac{\pi}{2}[$ et ne s'annulent pas donc la fonction $\tilde{f}$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};0[\cup]0;\frac{\pi}{2}[$. La fonction $\tilde{f}$ est donc dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. On calcule :
   $$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$
   La fonction $\tilde{f}'$ est donc définie par
   $$\tilde{f}'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

4. La fonction $\tilde{f}'$ est-elle continue sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$? Justifier votre réponse.
   Correction : La fonction $\tilde{f}'$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2};0[\cup]0;\frac{\pi}{2}[$ car cos et sin sont continues et sin ne s'annule pas sur cet ensemble. Il reste à vérifier si $\lim_{x\to 0} \tilde{f}'(x) = \tilde{f}'(0)$. On écrit pour $x \neq 0$:
   $$\tilde{f}'(x) = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \times \frac{x^2}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} \times \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$
   On utilise les résultats du cours : $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ pour en déduire que $\lim_{x\to 0} \tilde{f}'(x) = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2} = \tilde{f}'(0)$. On conclut que la fonction $\tilde{f}'$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.