

Chapitre 5. Exercice A.2.1-question 1 Application de la formule de dérivation

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

- $g \circ f(x) = \ln |\tan \frac{x}{2}|$ sur $] -\pi, \pi[\setminus \{0\}$.

On pose $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $g(t) = \ln |t|$, puis $\forall x \in] -\pi, \pi[$, $f(x) = \tan \frac{x}{2}$

$$g'(t) = \begin{cases} \frac{-1}{-t} = \frac{1}{t} & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \tan'(\frac{x}{2})$$

$$\tan'(\theta) = \frac{\cos \theta \times \cos \theta - (-\sin \theta) \times \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}.$$

Finalement,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \times \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

- $g \circ f(x) = \cos^2(3 \sin(4x))$ sur \mathbb{R} .

On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \cos^2 t$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3 \sin(4x)$.

$$g'(t) = -2 \sin t \cos t = -\sin(2t) \text{ et } f'(x) = 12 \cos(4x).$$

On obtient

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = 12 \cos(4x) \times (-\sin(6 \sin(4x))) = -12 \cos(4x) \sin(6 \sin(4x)).$$

Chapitre 5. Exercice A.2.11 Dérivée de fonctions paires et impaires

- On montre que si f est une application définie et dérivable sur \mathbb{R} et paire alors sa dérivée première est une fonction impaire.

$$f'(-a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-a+h) - f(-a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{h} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a+k) - f(a)}{-k} = -f'(a),$$

où dans $\textcircled{1}$, on a effectué le changement de variable $k = -h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad f'(-a) = -f'(a).$$

- On montre que si f est une application définie et dérivable sur \mathbb{R} et impaire alors sa dérivée première est une fonction paire.

$$\begin{aligned} f'(-a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-a+h) - f(-a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(a-h) + f(a)}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{h} = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a+k) - f(a)}{-k} = -(-f'(a)) = f'(a). \end{aligned}$$

Chapitre 5. Exercice hors poly

On définit la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = x^3 \cos(\frac{1}{x})$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en $a = 0$ en une fonction \tilde{f} à préciser.
2. Montrer \tilde{f} est dérivable en $a = 0$.
3. Calculer $\tilde{f}'(x)$ pour $x \neq 0$.
4. Justifier que \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
5. Montrer que \tilde{f} n'est pas de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

Correction

1. Par produit et composition de fonctions usuelles continues (polynôme, cosinus et fonction inverse), la fonction f est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En $a = 0$,

$$\begin{cases} x^3 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ x \mapsto \cos(\frac{1}{x}) \text{ est bornée} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Par conséquent, la fonction f est prolongeable en une fonction \tilde{f} définie et continue sur \mathbb{R} par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^3 \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On dit que \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R} .

2. On détermine la limite du taux d'accroissement de \tilde{f} en $a = 0$:

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = \frac{x^3 \cos(\frac{1}{x}) - 0}{x} = x^2 \cos(\frac{1}{x}).$$

Avec les mêmes arguments, on obtient que

$$\begin{cases} x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ x \mapsto \cos(\frac{1}{x}) \text{ est bornée} \end{cases} \Rightarrow \tilde{f}'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = 0.$$

3. Pour $x \neq 0$, on a $\tilde{f}'(x) = 3x^2 \cos(\frac{1}{x}) + x \sin(\frac{1}{x})$.
4. Par somme, produit et composition de fonctions usuelles continues, l'expression $x \mapsto 3x^2 \cos(\frac{1}{x}) + x \sin(\frac{1}{x})$ définit une fonction continue sur son domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

De plus,

$$\begin{cases} 3x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ x \mapsto \cos(\frac{1}{x}) \text{ est bornée} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 \cos(\frac{1}{x}) = 0.$$

et

$$\begin{cases} x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ x \mapsto \sin(\frac{1}{x}) \text{ est bornée} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}'(x) = 0 = \tilde{f}'(0)$. Ce qui traduit la continuité de \tilde{f}' en $a = 0$ également.

On dit que \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

5. La fonction \tilde{f} est évidemment deux fois dérivable en $a \neq 0$ (car l'expression de $\tilde{f}'(x)$ est dérivable) et $x \mapsto \tilde{f}''(x) = (6x - \frac{1}{x}) \cos(\frac{1}{x}) + 4 \sin(\frac{1}{x})$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On peut dire que \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

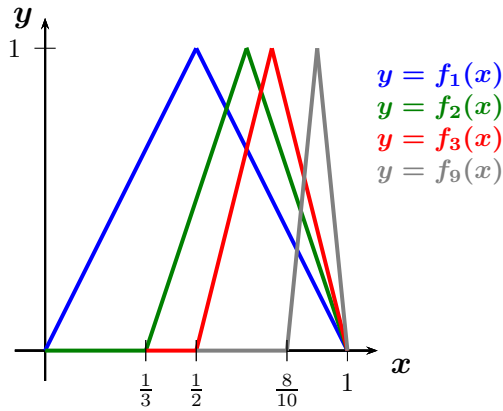
En $a = 0$, on étudie le taux d'accroissement de \tilde{f}' :

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 3x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$$

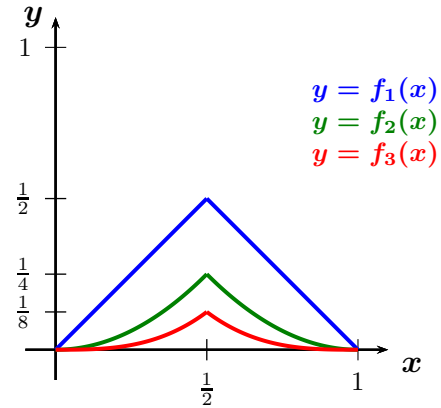
Celui-ci n'admet pas de limite quand $x \rightarrow 0$ à cause du second terme.

La fonction f n'est pas deux fois dérivable en 0. On ne peut pas dire que \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

Chapitre 4 - Exercice A.2.17



(i)



(ii)

2. • Dans le cas (i), on montre que pour $x \in [0, 1]$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, f_n(x) = 0$:

$$\text{on résout } x \leq \frac{n-1}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)x \leq n-1 \Leftrightarrow 1+x \leq n-nx \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} \leq n$$

On propose $N = E\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + 1$.

Cela montre qu'à partir du rang N , la suite $(f_n(x))$ est constante égale à 0 et donc converge vers 0. La suite (f_n) converge simplement sur $D = [0, 1]$ vers la fonction identiquement nulle.

• Dans le cas (ii), on voit bien que les courbes représentatives des fonctions f_n convergent vers l'axe des abscisses. On décompose les fonctions f_n comme suit

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (1-x)^n & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Les résultats sur les suites géométriques entraînent

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1-x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow (1-x)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

La suite (f_n) converge simplement sur $D = [0, 1]$ vers la fonction identiquement nulle.

3. On pose $(u_n) = \sup\{|f_n(x)|; x \in D\}$.

• Pour (i) on voit graphiquement, qu'il n'y a pas convergence uniforme. Ici, on voit graphiquement, que $u_n = f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$. La suite (u_n) est constante égale à 1 donc ne converge pas vers 0.

• Pour (ii) on voit graphiquement qu'il y a convergence uniforme.

Ici, $u_n = f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Chapitre 5 - Exercice A.2.25. Convergence uniforme de suites de fonctions

1. $f_n(0) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.

$f_n(1) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = 0$.

Pour $x \in]0, 1[$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

2. Tout d'abord, on remarque que $\forall x \in [0, 1]$, $f_n(x) \leq 0$ donc $|f_n(x)| = -f_n(x)$.

Pour $x \in]0, 1[$, on calcule $f'_n(x) = (nx^{n-1} \ln x + x^n \times \frac{1}{x}) = x^{n-1}(n \ln x + 1)$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	$u_n = e^{-\frac{1}{n}}$	1
$f'_n(x)$		- 0 +	
$f_n(x)$	0	$-\frac{1}{ne}$	0
$ f_n(x) $	0	$\frac{1}{ne}$	0

3. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, 1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq u_n$ avec $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La convergence de (f_n) vers f est donc uniforme sur $D = [0, 1]$.

Chapitre 5 - Exercice A.2.26. Convergence non uniforme de suites de fonctions

1. On sait que $te^{-t} = \frac{t}{e^t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Pour $x \in]0, +\infty[$ fixé, on a par composition de limites $nxe^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{0}{1-e^{-x}} = 0$.

2. D'après 1. on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = 0$.

Pour $n \geq 1$ fixé, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\frac{e^{-x}-1}{x}} = -\frac{1}{-1} = 1$. D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) \right) = +\infty.$$

3. Pour toutes suites de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f , on peut intervertir les limites entre les variables n et x .

Par conséquent, (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction identiquement nulle.

4. On propose une suite $(x_n) \subset D$, telle que $(|f_n(x_n)|)$ ne converge pas vers 0.

Prenons $x_n = \frac{1}{n} \in D$. Alors, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{-1}}{1-e^{-\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq |f_n(x_n)|$, on en déduit que la suite (u_n) ne converge pas vers 0 non plus. La convergence n'est pas uniforme.