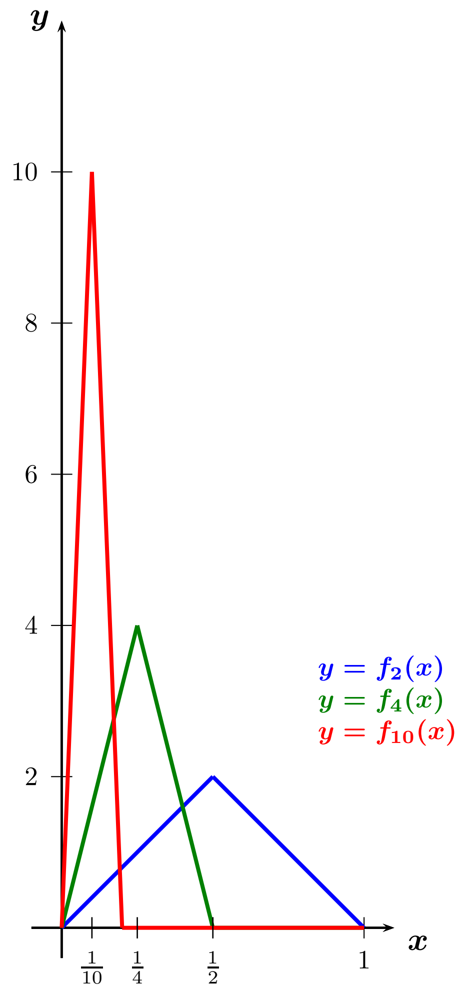
Chap 4. Exercice A.2.19.

1. Faire une représentation graphique de f_2, f_4 et f_{10}.



• Tout d'abord on montre que la suite de fonctions converge vers la fonction identiquement nulle.
Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$. La suite $(f_n(0))$ est constante égale à 0 donc converge vers $x = 0$.
Pour $x \in]0, 1]$ fixé. Il existe $N = E(\frac{2}{x}) + 1$ tel que $x \leq \frac{2}{N}$. POur tout entier $n \geq N$, on a

$$\frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} \leq x \quad \Rightarrow \quad f_n(x) = 0.$$

La suite $(f_n(0))$ est constante égale à 0 à partir du rang N donc elle converge vers $x = 0$.
On en déduit que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction identiquement nulle.

• En ce qui concerne la convergence uniforme, on détermine $u_n = \sup\{|f_n(x)|;\, x \in [0, 1]\} = f_n(\frac{1}{n}) = n$. Comme (u_n) diverge vers ∞ la convergence n'est pas uniforme.

2. • À x fixé, on vérifie tout d'abord si la suite $(f_n(x))$ converge. Comme à l'exercice A.2.6 du chapitre 4, on utilise l'encadrement de la fonction partie entière :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad t - 1 < E(t) \leq t.$$

Pour $x \neq 0$ fixé, on pose $t = \frac{n}{x}$ et

$$\tfrac{n}{x} - 1 < E(\tfrac{n}{x}) \leq \tfrac{n}{x} \quad \Rightarrow \quad x - \frac{x^2}{n} < f_n(x) \leq x.$$

D'après le théorème des gendarmes, la suite $(f_n(x)$ converge vers x.
Pour $x = 0$, la suite $(f_n(0))$ est constante égale à 0 donc converge vers $x = 0$.
La suite de fonction (f_n) converge simplement sur $D = [0, 1]$ vers la fonction $f(x) = x$.

• L'encadrement de f_n permet de démontrer la convergence uniforme :

$$\forall\, x \in D = [0, 1],\ -\frac{x^2}{n} \leq f_n(x) - f(x) \leq 0.$$

On en déduit que $u_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|;\, x \in [0, 1]\} = \frac{1}{n}$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on en déduit que la convergence est uniforme.

Chap 5. Exercice A.2.27.

1. Pour $x \geq 0$ fixé, on a $\forall n > x,\ f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n = e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})}$.
On sait que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = -1$ donc par composition de limites $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln(1 - \frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = -1$.
D'où

$$f_n(x) = e^{x \times \frac{\ln(1 - \frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}} \underset{n \to +\infty}{\to} f(x) = e^{-x}.$$

2. Pour $x \geq n$, on a $|f_n(x) - f(x)| = e^{-x}$ donc $u_n = \max\limits_{x \in [n, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = e^{-n}$.

3a) On calcule la dérivée première pour $x \in [0, n[$:

$$\varphi_n'(x) = (n-1) \frac{-\frac{1}{n}}{1 - \frac{x}{n}} + 1 = \frac{n-1}{x-n} + 1 = \frac{1-x}{n-x}$$

x	0		1		n^-
$\varphi_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi_n(x)$	0	$\nearrow$	$\varphi_n(1)$	$\searrow$	$-\infty$

D'après le tableau de variation, on a $\forall\, x \in \,]0, 1],\ \varphi_n(x) > 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiares, $\exists! c_n \in \,]1, n[,\ \varphi_n(c_n) = 0$.

x	0		c_n		n^-
$\varphi_n(x)$		$+$	0	$-$	

3b) On étudie les variations de $f_n - f$:

$$f_n'(x) - f'(x) = n \times (-\frac{1}{n}) \times (1 - \frac{x}{n})^{n-1} + e^{-x} = -e^{(n-1)\ln(1 - \frac{x}{n})} + e^{-x} = e^{-x}\left(1 - e^{\varphi_n(x)}\right).$$

$$\Rightarrow f_n'(x) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = c_n.$$

x	0		c_n		n^-
$f_n'(x) - f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x) - f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{c_n e^{-c_n}}{n}$	$\nearrow$	0
$\lvert f_n(x) - f(x)\rvert$	0	$\nearrow$	$\frac{c_n e^{-c_n}}{n}$	$\searrow$	0

$$\varphi_n(c_n) = 0 \Rightarrow (n-1)\ln(1-\frac{c_n}{n}) = -c_n \Rightarrow f_n(c_n) = (1-\tfrac{c_n}{n}) \times (1-\frac{c_n}{n})^{(n-1)} = (1-\frac{c_n}{n})e^{-c_n}.$$

3c) On a $g'(x) = e^{-x}(1-x)$. D'où

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

4. On peut écrire

$$\forall\, n \geq 1,\ \forall\, x \in [0,+\infty[,\ \lvert f_n(x) - f(x)\rvert \leq \max(\frac{1}{ne}, e^{-n}) = \frac{1}{ne} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,+\infty[$.

Chap 5. Exercice A.2.28. Convergence uniforme de séries de fonctions continues

1. Pour $x = 0$, on a $S_n(0) = 0$ et converge vers $S(0) = 0$.
Pour $x \neq 0$, on remarque que $S_n(-x) = -S_n(x)$ et on étudie le cas $x > 0$ avec les règles de Riemann :

$$n^3 f_n(x) = \frac{n^3 x}{n + n^3 x^2} \to \frac{1}{x} \neq 0$$

donc $(S_n(x))$ converge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $|f_n|$ est paire, donc on cherche un maximum global sur $[0, +\infty[$ uniquement.

$$f_n'(x) = \frac{n(1 + n^2x^2) - 2x^2n^3}{n^2(1 + n^2x^2)^2} = \frac{n(1 - n^2x^2)}{n^2(1 + n^2x^2)^2}$$

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$u_n = \frac{1}{2n^2}$	$\searrow$	0

3. Soit $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

4. D'après les regles de Riemann la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge vers une limite ℓ donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \ell - \sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\to} \ell - \ell = 0.$$

La série (S_n) converge donc uniformément vers S sur $\mathbb{R}$.

5. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue, on en déduit que S_n aussi en tant que somme finie de fonctions continues. La convergence uniforme assure que la limite S est également continue.

Chap 5. Exercice A.2.29.

1. On a

$$\begin{aligned} g_0(x) = H(x) \times H(1-x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad H(x) = 0 \text{ ou } H(1-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \leq 0 \text{ ou } 1 - x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[. \end{aligned}$$

2. Pour $x \in]0,1[$, on a

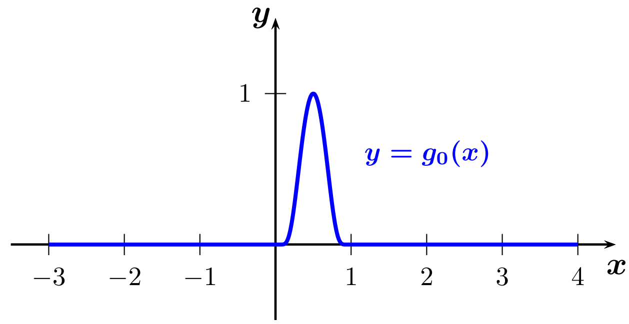
$$\begin{aligned} g'(x) = H'(x)H(1-x) - H(x)H'(1-x) &= \frac{1}{x^2} e^{2-\frac{1}{x}} e^{2-\frac{1}{1-x}} - e^{2-\frac{1}{x}} \times \frac{1}{(1-x)^2} e^{2-\frac{1}{1-x}} \\ &= e^{2-\frac{1}{x}} e^{2-\frac{1}{1-x}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1-x)^2} \right) \\ &= e^{2-\frac{1}{x}} e^{2-\frac{1}{1-x}} \left(\frac{1-2x}{x^2(x-1)^2} \right) \end{aligned}$$

La dérivée première s'annule en $c_0 = \frac{1}{2}$ et $\max\limits_{x \in]0,1[} |g_0(x)| = g(c_0) = H(\frac{1}{2}) \times H(\frac{1}{2}) = 1$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

D'après **1.** $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} |g_0(x)| = 1$.

3.



4. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a

$$g_0(x-n) = H(x-n)H(1-(x-n)) = H(x-n)H(n+1-x) = 0.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $n > x$, on aura

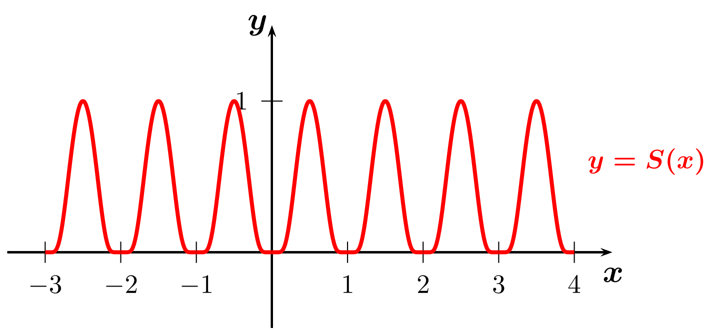
$$S_n(x) = H(x - E(x))H(1 + E(x) - x).$$

La suite $(S_n(x))$ est constante à partir d'un certain rang donc converge vers le nombre

$$S(x) = H(x - E(x))H(1 + E(x) - x) = g_0(x - E(x)).$$

La fonction S est périodique de période 1 car

$$E(x+1) = 1+E(x) \Rightarrow S(x+1) = g_0(x+1-E(x+1)) = g_0(x+1-E(x)-1) = g_0(x-E(x)) = S(x).$$



6. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$g_n(x) = \begin{cases} e^{2-\frac{1}{x-n}} e^{2-\frac{1}{n+1-x}} & \text{si } x \in]n, n+1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction g_n est continues en tant que composée de fonctions continues sur $]n, n+1[$.
Elle est continue sur $]-\infty, n[\cup]n+1, +\infty[$ car constante.
Il reste à vérifier les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to n^+} g_n(x) = g_n(n) = 0$ et $\lim\limits_{x\to(n+1)^-} g_n(x) = g_n(n+1) = 0$

$$\frac{1}{x-n} \underset{x\to n^+}{\to} \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{1}{x-n} \underset{x\to n^+}{\to} -\infty \quad \Rightarrow \quad e^{2-\frac{1}{x-n}} \underset{x\to n^+}{\to} 0 \quad \Rightarrow g_n(x) \underset{x\to n^+}{\to} 0.$$

$$\frac{1}{n+1-x} \underset{x\to(n+1)^-}{\to} \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{1}{n+1-x} \underset{x\to(n+1)^-}{\to} -\infty \quad \Rightarrow \quad e^{2-\frac{1}{n+1-x}} \underset{x\to(n+1)^-}{\to} 0 \quad \Rightarrow g_n(x) \underset{x\to n^+}{\to} 0.$$

La fonction g_n est continue en tout point sur $\mathbb{R}$.

7. La suite (S_n) ne converge pas uniformément vers S car

$$\max\{|S_n(x) - S(x)|; x \in \mathbb{R}\} = g_{n+1}(n + 1 + \tfrac{1}{2}) = g_0(\tfrac{1}{2}) = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$$