Chapitre 3 - Suites numériques

Introduction : une application au traitement du signal

Reconstitution du signal $f(t)$, $t \in I$

à partir de $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$

I Définitions et propriétés

Definition

Une **suite réelle** est définie comme une application u de $\mathbb{N}$ (ou $[\![n_0, +\infty[\![$) dans $\mathbb{R}$, notée $u : n \mapsto u(n) = u_n$. On dit que u_n est le **terme général** de la suite et on note plus couramment $(u_n)_{n \geqslant 0}$ l'ensemble des termes de la suite.

Notation associée : on notera $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, la série numérique associée.

Exemples. (i) les suites arithmétiques : $u_n = an + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$.
(ii) les suites géométriques : $u_n = aq^n, \quad a, q \in \mathbb{R}$.
(iii) plus complexe : $u_n = \int_0^1 t^n \cos(nt)\, dt$ ou $\begin{cases} u_{n+1} = -(u_n)^3 + 3(u_n)^2 - 5 \\ u_0 = 3. \end{cases}$
(iv) encore plus complexe : les suites et séries de fonctions $(f_n(x))_n$ et $\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, $x \in I$.

Les suites que nous étudions sont le plus souvent définies soit par une expression explicite en fonction de n, soit par une relation de récurrence.

Rappels. Avec les notations précédentes,
(i) une suite arithmétique converge ssi ...
(ii) une suite géométrique converge ssi ...

Definition (suite convergente)

On dit que (u_n) **converge vers** $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

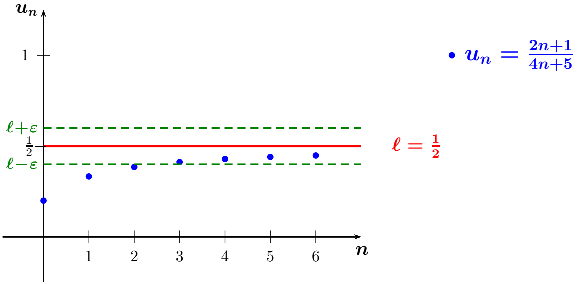
$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant 0,\ \Big(n > N \ \Rightarrow\ |u_n - \ell| < \varepsilon\Big)}.$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple. Montrons, à l'aide de la définition avec quantificateurs, que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n+1}{4n+5}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Correction. *en cours*

Représentation graphique.



Theorem (unicité de la limite)

La limite d'une suite convergente est unique.

Preuve. *par l'absurde*

$$\vdots$$

Definition (suite divergente)

1. Lorsqu'une suite (u_n) n'est pas convergente, on dit qu'elle est **divergente**.
2. On dit que la suite (u_n) **tend vers** $+\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n > N \Rightarrow\ u_n > A\Big)}.$$

3. On dit que la suite (u_n) **tend vers** $-\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, si

$$\boxed{\forall B \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n > N \Rightarrow\ u_n < B\Big)}.$$

Exemple. Montrer, à l'aide de la définition avec quantificateurs, que la suite de terme général $u_n = 2^n$, pour $n \geqslant 0$, tend vers $+\infty$.

Correction. *en cours*

Definition (Suite extraite)

Une **suite extraite** (ou sous-suite) de (u_n) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Il s'agit de la suite de termes :

$$u_{\varphi(0)}, u_{\varphi(1)}, \cdots, u_{\varphi(n)}, \cdots$$

Exemple 1. $(u_{n+1})_{n\geqslant 0}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

$$\vdots$$

Exemple 2. Étude de la suite définie, pour $n \geqslant 0$, par $u_n = \sin(n\frac{\pi}{6})$.

$$\vdots$$

Proposition

Si (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors **toute** *suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) converge vers ℓ également.*

La contraposée est très utile pour montrer qu'une suite diverge !

Exercice. Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, définie pour $n \geqslant 0$, diverge.
Correction. *en cours*

Definition

1. Une suite (u_n) est dite **majorée** si $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.$
2. Une suite (u_n) est dite **minorée** si $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m.$
3. Une suite (u_n) est dite **bornée** si elle est majorée et minorée.
   Autrement dit, $\exists M \geqslant 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M.$

Proposition

Toute suite convergente est bornée.

preuve. *en cours*

⚠ La réciproque est fausse ! une suite peut être bornée sans converger.

Contre-exemple : Étude de la suite définie, pour $n \geqslant 0$, par $u_n = (-1)^n$.

Exercice de cours de la section A.1

Pour une meilleure compréhension du cours, vous pouvez faire les exercices suivants :

- A.1.3
- A.1.6
- A.1.11
- A.1.14 (limites indéterminées)
- A.1.15

Ces exercices sont à faire en dehors des TDs et avant les 3h de TDs qui suivent ce cours.