Chapitre 4 - Limite et continuité

Notion de voisinage d'un point a

Definition

On dit que V est un **voisinage de a dans $\mathbb{R}$** si V contient un intervalle ouvert contenant a.

Exemples.
1. $[0, 1[$ n'est pas un voisinage de $a = 0$ dans $\mathbb{R}$.
2. $]-0.001,\ 100[$ est un voisinage de $a = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Definition

Soit f une fonction et soit D_f son domaine de définition. On dit que W est un **voisinage de a dans D_f** si W est de la forme $W = D_f \cap V$ où V est un voisinage de a dans $\mathbb{R}$.

Exemples.
1. Avec $f(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = [0, +\infty[$ et $a = 0$:
2. Avec $f(x) = \frac{1}{x}, \quad D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $a = 0$:

NB : Dans ce cours, on utilisera des voisinages ouverts dans $\mathbb{R}$ centrés en a : $]a-\eta,\ a+\eta[,\ \eta > 0$.

$$\boxed{x \in]a-\eta,\ a+\eta[\quad \Leftrightarrow \quad a-\eta < x < a+\eta \quad \Leftrightarrow \quad -\eta < x-a < \eta \quad \Leftrightarrow \quad |x-a| < \eta}.$$

I Limite finie

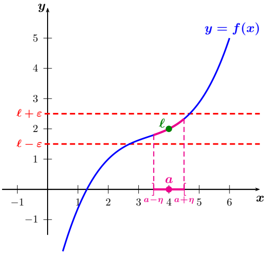
Objectif : Etre capable de démontrer (entre autre) les résultats suivants :

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{1} \qquad \sin\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \text{pas de limite} \qquad x\sin\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{0} \qquad \frac{1-\cos x}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Definition (Limite finie)

Soit Ω un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ une application. On dit que $f(x)$ **admet une limite finie** ℓ **en** a ssi $\boxed{\forall\, \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall\, x \in \Omega\backslash\{a\},\ \left(|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon\right)}$.

Remarque : Cette définition doit se comprendre comme celle de la convergence d'une suite.
" Quel que soit l'écart $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on veut, on peut toujours trouver un voisinage de valeurs $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap D_f$ autour de a dont les images $f(x)$ vont s'accumuler dans la bande $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$"



Vous trouverez ci-contre une illustration de la définition.
Soit a un point sur la droite réelle. On suppose $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

On fixe arbitrairement un écart $\varepsilon > 0$. On peut rétrécir la bande $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ autant qu'on veut, on trouvera toujours un morceau de courbe (en rose) représentant les images $f(x)$ qui s'accumulent autour ℓ.

Le voisinage de a recherché $]a-\eta, a+\eta[$ correspond aux antécédents des images $f(x)$ de ce morceau de courbe.

Illustration de l'utilisation de la définition avec quantificateurs

Exercice : 1) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \left|\sin x\right| < |x|$.
2) Montrer, à l'aide de la définition, que $\sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Correction : 1) Je vous demande de jeter un œil au cercle trigonométrique fourni en complément (sur la fonction tangente). On effectue cette étude en 3 étapes :

2) On fixe $\varepsilon > 0$. On doit chercher la valeur de η permettant de démontrer l'implication de la définition

$$|x - 0| < \eta \Rightarrow \left|\sin x - 0\right| < \varepsilon$$

Definition (Limite à droite\à gauche)

Soit Ω un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une application.
On dit que $f(x)$ **admet une limite finie** $\ell \in \mathbb{R}$

1. **à droite en** a si $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega \setminus \{a\}, (a < x < a + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$
2. **à gauche en** a si $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega \setminus \{a\}, (a - \eta < x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$.

Exemple : Avec la fonction **partie entière** notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$. Reprendre la représentation graphique de cette fonction vue au chap 2 et étudier les limites à gauche et à droite en $p \in \mathbb{Z}$.

Correction : *en cours*

Proposition

$$\left(\exists \ell \in \mathbb{R}, \lim_{x \to a} f(x) = \ell\right) \Leftrightarrow \left(\exists \ell \in \mathbb{R}, \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \ \ et \ \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell\right)$$

Definition

Soit $f :]A, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application. On dit que $f(x)$ **tend vers** $\ell \in \mathbb{R}$ **quand** x **tend vers** $+\infty$ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x > A,\ (x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)}.$$

Remarque : Cette définition ressemble beaucoup à celle de la convergence d'une suite. Pour l'appliquer, la méthodologie est donc similaire.

Exercice : Soit f la fonction définie sur $D_f =]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.
Montrer à l'aide de la définition que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Correction : Soit $\varepsilon > 0$. On résout $|f(x) - 2| < \varepsilon$ pour trouver une borne inférieure B pour x.