III Les formes de raisonnements mathématiques

$\boxed{B}$ Raisonnement par contraposée.

Au lieu de démontrer directement $(P \Rightarrow Q)$, on démontre plutôt $(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$ qui lui est équivalente.

Exercice A.2.7. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \neq y \quad \Rightarrow \quad (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

Correction. *en cours*

$\vdots$

$\boxed{C}$ Raisonnement par l'absurde.

Au lieu de démontrer directement $(P \Rightarrow Q)$, on montre que sa négation $\big(P \text{ et } (\text{non } Q)\big)$ est fausse.

Exercice A.2.9. Montrer que $n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad n$ est impair ou $n(n+2)(n+3)$ est multiple de 4.

Correction. *en cours*

$\vdots$

$\boxed{D}$ Démontrer une inclusion ensembliste.

- Pour démontrer l'inclusion $A \subset B$, on démontre l'implication $\boxed{x \in A \;\Rightarrow\; x \in B}$.
- Pour démontrer une égalité entre 2 ensembles, on démontre deux inclusions : autrement dit,

$$\boxed{A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subset B) \text{ et } (B \subset A)}$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(0) = 0$.
On pose $A = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = f(f(x)) = 0\}$.

- Montrer que $A \subset B$.
- A-t-on $A = B$? *(Étudier $f(x) = x(x-1)$.)*

Correction. *en cours*

IV Les quantificateurs.

A Notations.

• Un proposition peut dépendre d'une variable appartenant à un ensemble E.
exemple : (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la proposition $P(n)$:=« $1+3+\cdots+2n-1=n^2$ ».
(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit $P(x)$:=« $x^2-1<0$ ».

• **Notations :** pour abréger les énoncés dépendants d'une (ou plusieurs) variable(s), nous utilisons des symboles appelés **quantificateurs**.
① Au lieu d'écrire « **Pour tout** $x \in E$, on a $P(x)$ », on écrit « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ ».
② Au lieu d'écrire « **Il existe** $x \in E$ tel que $Q(x)$ », on écrit « $\exists\, x \in E,\ Q(x)$ ».

• **Négations :** ① non $\Big(\forall\, x \in E,\ P(x)\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\exists\, x \in E, \text{ non } P(x)\Big)$.
② non $\Big(\exists\, x \in E,\ Q(x)\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall\, x \in E, \text{ non } Q(x)\Big)$.

Exercice. On peut utiliser la négation d'une proposition pour déterminer sa valeur de vérité.
① « $\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2-1<0$ » est-elle vraie ou fausse ?
② « $\exists\, x \in \mathbb{R}, x^2+1=0$ » est-elle vraie ou fausse ?

Correction. *en cours*

$\boxed{B}$ Existence et unicité.

Autre notation. Au lieu d'écrire « **Il existe un unique** $x \in E$ tel que $P(x)$ », on écrit « $\exists\,!\, x \in E, P(x)$ ».

Proposition

On a l'équivalence suivante :

$$\exists\,!\, x \in E,\ P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\exists\, x \in E,\ P(x) \quad et \quad \underbrace{\ldots\ \ldots}_{\text{comment exprime-t-on l'unicité ?}}\Big)$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire la négation de « $\exists !\, x > 0,\ f(x) = 0$ ».

Correction. *en cours*

$\boxed{C}$ Quantificateurs multiples.

• Une proposition peut dépendre de plusieurs variables.

Exemple : Pour $x, y \in \mathbb{R}$, définissons la proposition $P(x, y) :=$« $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$ ».

On a démontré précédemment que $\boxed{\textit{pour tout couple de réels } (x, y), \textit{ on a } \ x \neq y \Rightarrow P(x, y)}$.

Ceci peut se réécrire de plusieurs façons :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x \neq y \Rightarrow P(x, y)$
2. $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x \neq y \Rightarrow P(x, y)$
3. $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ x \neq y \Rightarrow P(x, y)$
4. $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \Rightarrow P(x, y)$
5. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R}\backslash\{x\}, P(x, y)$
6. $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{y\}, P(x, y)$.

Propriété(s)

① *Les introductions de variables par deux quantificateurs identiques successifs peuvent être échangés !*
② *En niant une proposition, on ne change pas le domaine de définition d’une variable qui suit directement un quantificateur.*

Exercice. A l’aide des quantificateurs, écrire la négation de la phrase

$$\boxed{\textit{pour tout couple de réels } (x,y), \textit{ on a } \; x \neq y \Rightarrow P(x,y)}$$

Correction. *en cours*

On ne peut pas intervertir deux quantificateurs distincts.

Exercice. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes.

① $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ \ y < x.$
② $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \ y < x.$

Correction. *en cours*

Exercice de cours de la section A.1

Pour une meilleure compréhension du cours, vous pouvez faire les exercices suivants :

- A.1.9, A.1.13, A.1.14 *(en dressant les tables de vérités)*
- A.1.12
- A.1.15, A.1.16
- A.1.17, A.1.20
- A.1.21, A.1.22 *(pas de démonstrations mais comprendre les égalités à l'aide d'un schéma)*
- A.1.24
- A.1.32

Ces exercices sont à faire en dehors des TDs et avant les 3h de TDs qui suivent ce cours.