V Suites de fonctions

Definition (suite de fonctions)

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers la fonction f sur D ssi $\boxed{\forall x \in D, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)}$.
La fonction f est appelée **limite simple**.

Exemple 1. Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ où $f_n(x) = x^n$.

Correction. *en cours*

$$\vdots$$

Exemple 2. Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ où $f_n(x) = n\sin\frac{x}{n}$.

Correction. *en cours*

$$\vdots$$

Exemple 3. Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ où $f_n(x) = \frac{1+nx}{n^3+x^2}$.

Correction. *en cours*

$$\vdots$$

Definition (Convergence uniforme d'une suite de fonctions)

Soient $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de fonctions définies et bornées sur une partie D non vide de $\mathbb{R}$.
Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on pose $\boldsymbol{u_n = \sup\left\{|f_n(x) - f(x)|;\ x \in D\right\}}$.
La suite (f_n) **converge uniformément** vers f sur D si et seulement si

1. la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est bien définie dans $\mathbb{R}$,
2. $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

Exemple 1. La suite de fonctions définies sur $D = \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$ converge uniformément vers f définie par $f(x) = |x|$.

Correction. *en cours*

$$\vdots$$

Exemple 2. La suite de fonctions définies sur $D = \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1+nx}{n^3+x^2}$ converge uniformément vers sa limite simple.

Correction. *en cours*

$$\vdots$$

Exemple 3. La suite de fonctions définies sur $D = [0, 1]$ par $f_n(x) = x^n$ ne converge pas uniformément vers sa limite simple.

Correction. *en cours*

Theorem (Interversion des limites)

Soit (f_n) une suite de fonctions ***convergeant uniformément*** *vers une fonction f sur D.*
De plus si (f_n) est une suite de fonctions ***continues*** *sur D* ***alors*** *la limite* ***f*** *est une fonction* ***continue*** *sur D et*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right).$$

⚠ Ce résultat est faux en général si la convergence n'est pas unniforme : pour $f_n(x) = x^n$,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to 1} f_n(x) \right) =$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) =$$

⚠ La limite simple $f(x)$ peut être continue sans qu'il y ait convergence uniforme.
Il n'y a pas équivalence.

$\longrightarrow$ simulation MATLAB