Chapitre 4. Exercice A.2.6 Soient $a>0$ et $b>0$.
1. On utilise la caractérisation de la fonction partie entière :

$$\forall X \in \mathbb{R},\ X-1 < E(X) \leq X.$$

Pour $x \neq 0$ et $X = \frac{b}{x}$, on obtient $\frac{b}{x} - 1 < E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{x}$.

$$x>0 \Rightarrow \quad \frac{x}{a} \times \left(\frac{b}{x} - 1\right) < \frac{x}{a} \times E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{x}{a} \times \frac{b}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} - \frac{x}{a} < f_1(x) \leq \frac{b}{a}$$

$$x<0 \Rightarrow \quad \frac{x}{a} \times \left(\frac{b}{x} - 1\right) > \frac{x}{a} \times E\left(\frac{b}{x}\right) \geq \frac{x}{a} \times \frac{b}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} - \frac{x}{a} > f_1(x) \geq \frac{b}{a}$$

Puisque $\frac{b}{a} - \frac{x}{a} \underset{x\to 0}{\to} \frac{b}{a}$, on en déduit grâce au théorème des gendarmes que $f_1(x) \underset{x\to 0}{\to} \frac{b}{a}$.

2. Il faut étudier la fonction f_2 sur les intervalles $]-a\,,0[$ et $]0\,,a[$.
• Si $x \in]0\,,a[$, alors $\frac{x}{a} \in]0\,,1[$ et $E(\frac{x}{a}) = 0$. Par conséquent $\forall x \in]0\,,a[,\ f_2(x) = 0$ et

$$\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = 0\ .$$

• Si $x \in]-a\,,0[$, alors $\frac{x}{a} \in]-1\,,0[$ et $E(\frac{x}{a}) = -1$. Par conséquent

$$\lim_{x\to 0^-} f_2(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{b}{x} = +\infty\ .$$

conclusion : la limite à droite existe mais la limite à gauche n'existe pas donc la fonction f_2 n'admet pas de limite en 0.

Chapitre 4. Exercice A.2.4

1. $\dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \dfrac{x}{\sin x} \times x \sin\frac{1}{x}$.

On a $\dfrac{x}{\sin x} \underset{x\to 0}{\to} 1$. De plus $\sin\frac{1}{x}$ est borné sur $\mathbb{R}^*$ donc $x\sin\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\to} 0$.

On en déduit que $\dfrac{x}{\sin x} \times x\sin\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1 \times 0 = 0$.

3. • La limite est indéterminée en $+\infty$, on utilise la méthode du conjugué :

$$x+2-\sqrt{x^2+4x} = \frac{(x+2-\sqrt{x^2+4x})(x+2+\sqrt{x^2+4x})}{x+2+\sqrt{x^2+4x}} = \frac{(x+2)^2-(x^2+4x)}{x+2+\sqrt{x^2+4x}} = \frac{4}{x+2+\sqrt{x^2+4x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$$

• En $-\infty$ on obtient directement le résultat

$$x+2-\sqrt{x^2+4x} \underset{x\to-\infty}{\to} -\infty.$$

5. Il faut écrire pour $x>0$: $x-2 = (\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})$. On obtient

$$\frac{x-\sqrt{2x}}{x-2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} \underset{x\to 2}{\to} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ .$$

7. On utilise le résultat $\frac{\sin X}{X} \underset{X\to 0}{\to} 1$ pour $X = 2x$ et $X = 3x$.

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2x}{\tan 3x} = \sin 2x \times \cos 3x \times \frac{1}{\sin 3x} &= \frac{\sin 2x}{2x} \times 2x \times \cos 3x \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{1}{3x}\\ &= \frac{\sin 2x}{2x} \times \cos 3x \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3} \underset{x\to 0}{\to} 1 \times 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\ .\end{aligned}$$

Exercice supplémentaire. Démontrer, à l'aide de la définition avec quantificateurs, que la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

admet une limite finie quand $x \to 1$.

1. Représenter graphiquement cette fonction. On rappelle la définition de la limite.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in]0,+\infty[,\ (|x-1| < \eta \Rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On doit commencer par résoudre l'inégalité $|f(x)-1| < \varepsilon$.
Ici on doit le faire deux fois :

• <u>À gauche de $a = 1$</u> :

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 1-\varepsilon < \frac{1}{x} < 1+\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{1-\varepsilon} > x > \frac{1}{1+\varepsilon} & \text{si } 0\varepsilon < 1 \\ x > \frac{1}{1+\varepsilon} & \text{si } \varepsilon \geq 1. \end{cases}$$

L'application de la fonction inverse change le sens des symboles $<$.
L'ensemble des solutions situées dans l'intervalle $]0,1[$ est $S_g :=]\frac{1}{1+\varepsilon}, 1[$.

• <u>À droite de $a = 1$</u> :

$$|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 1-\varepsilon < \sqrt{x} < 1+\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1-\varepsilon)^2 < x < (1+\varepsilon)^2 & \text{si } 0 < \varepsilon < 1 \\ 0 \leq x < (1+\varepsilon)^2 & \text{si } \varepsilon \geq 1. \end{cases}$$

(Représenter graphiquement $\sqrt{\cdot}$ pour mieux comprendre la distinction de cas.)
Dans tous les cas, l'ensemble des solutions situées dans l'intervalle $[1,+\infty[$ est $S_d := [1,(1+\varepsilon)^2[$.

3. On conclut en proposant un intervalle centré en $a = 1$ situé dans l'ensemble des solution

$$S = S_g \cup S_d =]\tfrac{1}{1+\varepsilon}, (1+\varepsilon)^2[.$$

On propose la condition $x \in]1-\eta,\ 1+\eta[$ avec $\eta = \min(1 - \frac{1}{1+\varepsilon}, (1+\varepsilon)^2 - 1)$.

$$x \in]1-\eta,\ 1+\eta[\quad \Rightarrow \quad |x-1| < \eta \quad \Rightarrow \quad x \in S \quad \Rightarrow \quad |f(x)-1| < \varepsilon$$

Chapitre 4. Exercice A.2.8

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{D}$. Par hypothèse f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0, ce qui signifie

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta_1 > 0\,,\ \forall x \in \mathbf{D}\backslash\{x_0\} \Big(|x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \Big)\,.$$

On devine assez aisément que dans ce cas, la fonction $|f| : x \mapsto |f(x)|$ admet une limite en x_0 égale à $|\ell|$. Nous devons donc montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta_2 > 0\,,\ \forall x \in \mathbf{D}\backslash\{x_0\} \Big(|x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow \big||f(x)| - |\ell|\big| < \varepsilon \Big)\,.$$

• Pour cela, il suffit de démontrer l'inégalité suivante : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2\,,\ \big||a| - |b|\big| \leq \big|a - b\big|\,.$
Pour ce faire, on démontre plutôt $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2\,,\ \big||a| - |b|\big|^2 \leq \big|a - b\big|^2$, puis on applique la fonction $\sqrt{\cdot}$ qui est croissante.
<u>preuve</u> : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Comme $|a|^2 = a^2$, on obtient

$$\big||a| - |b|\big|^2 = \big(|a| - |b|\big)^2 = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 = a^2 - 2|ab| + b^2$$

$$\big|a - b\big|^2 = \big(a - b\big)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Comme $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \leq |x|$, on peut écrire avec $x = ab$

$$ab \leq |ab| \Rightarrow -|ab| \leq -ab \Rightarrow -2|ab| \leq -2ab \Rightarrow a^2 - 2|ab| + b^2 \leq a^2 - 2ab + b^2\,.$$

On a bien

$$\big||a| - |b|\big|^2 \leq |a - b|^2 \Rightarrow \sqrt{(|a| - |b|)^2} \leq \sqrt{(a - b)^2} \Rightarrow \big||a| - |b|\big| \leq \big|a - b\big|\,.$$

• <u>Conclusion</u> : Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $\exists \eta_1 > 0\,,\ \forall x \in \mathbf{D}\backslash\{x_0\} \Big(|x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \Big)$.
En choisissant $\eta_2 = \eta_1$ on obtient

$$|x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow |x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow \big||f(x)| - |\ell|\big| \leq |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

□

2. La réciproque est fausse.
<u>Contre-exemple</u> : on peut prendre la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
La fonction $|f|$ est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ donc elle admet une limite en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ alors que la fonction f n'admet pas de limite en $x_0 = 0$ (les limites à gauche et à droite sont différentes).

Chapitre 4. Exercice A.2.10

1. Le sens « $\Rightarrow$ » est trivial : $\forall \varepsilon > 0,\ |a| = 0 < \varepsilon$.

Pour démontrer l'autre sens « $\Leftarrow$ », on peut démontrer la contraposée :

$$a \neq 0 \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0,\ |a| \geq \varepsilon\ .$$

preuve : soit $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, on pose $\varepsilon = |a|$. Alors, $\varepsilon > 0$ (car $a \neq 0$) et $|a| = \varepsilon \Rightarrow |a| \geq \varepsilon$.

2. On dit que f est une fonction périodique si

$$\exists\, T > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x + nT) = f(x).$$

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On doit montrer que « f est périodique et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ell$ ».

preuve : • On sait que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\ (x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)\ .$$

Ceci se réécrit $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, A > 0,\ \forall x \in]A\,,+\infty[\,,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

• Soit $x \in]-\infty, A]$ et soit $T > 0$ la période de la fonction f. On pose $X = \dfrac{A - x}{T}$. D'après la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > X$. On obtient

$$n > \frac{A - x}{T} \quad \Rightarrow \quad x + nT > A \quad \Rightarrow \quad |f(x + nT) - \ell| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon\ .$$

On en déduit que $\forall x \in]-\infty\,, A]\,,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

• Finalement, $\forall \varepsilon > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}\,,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$. D'après la question **1.**, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ |f(x) - \ell| = 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = \ell$. La fonction f est constante.

Chapitre 4. Exercice A.2.1
Les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. On a la CNS suivante

$$\text{f admet une limite } \ell \text{ en } 0 \;\Leftrightarrow \forall (x_n), \Big(x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ et } x_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} \ell \Big)$$

1. La contraposée devient

$$\text{f n'admet pas de limite en } 0 \;\Leftrightarrow \exists (x_n), \Big(x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ et } x_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ et } \big(f(x_n)\big) \text{ diverge } \Big)$$

• Pour $f_1(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ on prend la suite (x_n) définie par $x_n = \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$ pour $n \geq 0$.
On a bien $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et $x_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $f(x_n) = (-1)^n$. La suite $\big(f(x_n)\big)$ diverge.

• Pour $f_2(x) = \cos \frac{1}{x}$, on prend la suite (x_n) définie par $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ pour $n \geq 1$.
On a bien $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et $x_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $f(x_n) = (-1)^n$. La suite $\big(f(x_n)\big)$ diverge.

• Pour $f_3(x) = \dfrac{x}{|x|} \cos x$, on prend la suite (x_n) définie par $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$.
On a bien $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et $x_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $f(x_n) = (-1)^n \cos \dfrac{1}{n}$ (cos est paire). Il y a deux méthodes pour montrer la divergence de $(f(x_n))$:

<u>methode 1</u> : On raisonne par l'absurde :
On suppose que $\big(f(x_n)\big)$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Dans ce cas les suites $\big(f(x_{2n})\big)$ et $\big(f(x_{2n+1})\big)$ convergent vers la même limite ℓ également. Comme $f(x_{2n}) = \cos \dfrac{1}{2n}$ et $f(x_{2n+1}) = -\cos \dfrac{1}{2n+1}$ on en déduit que $\big(f(x_{2n})\big)$ et $\big(f(x_{2n+1})\big)$ convergent vers 1 et -1 respectivement, contradiction.

<u>methode 2</u> : On pose $u_n = (-1)^n$. On étudie la convergence de $f(x_n) - u_n = (-1)^n(\cos \frac{1}{n} - 1)$.
La suite de terme général $(-1)^n$ est bornée et $\cos \frac{1}{n} - 1 \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Donc d'après le corollaire 2 du Théorème des gendarmes, on en déduit que $f(x_n) - u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Maintenant, on raisonne par l'absurde : on suppose que $(f(x_n))$ converge et on écrit $(-1)^n = f(x_n) - (-1)^n(\cos \frac{1}{n} - 1)$. D'après les opérations sur les suites convergentes, on en déduit que $(-1)^n$ converge ce qui est faux. Donc la suite $(f(x_n))$ diverge.