Chapitre 1. Corrigés des exercices.

Exercice A.2.2 :

1. La première implication est vraie. D'après la table de vérité du connecteur "$\Rightarrow$", si P est toujours fausse dans $P \Rightarrow Q$ alors l'implication est vraie.

2. On peut écrire la contraposée et raisonner comme au **1.**.
Ou bien on se réfère à la table de vérité du connecteurs "$\Rightarrow$" : si Q est toujours vraie dans $P \Rightarrow Q$ alors l'implication est vraie.

Exercice A.2.14 :

2. A démontrer par l'absurde avec $p = 1$.
La phrase est équivalente à

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ n \text{ est pair ou } n^2 - 1 \text{ est un multiple de 8.}$$

Écrire la négation et montrer que la proposition obtenue est fausse.
correction : $\exists\, n \in \mathbb{Z}$, n est impair et $(n^2 - 1)$ n'est pas un multiple de 8.
Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. On calcule

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4(k^2 + k) = 4k(k+1).$$

Puisque le produit de deux entiers consécutifs est pair, on en déduit que $k(k+1) = 2q$ avec $q \in \mathbb{Z}$.
Finalement $n^2 - 1 = 8q$ est bien un multiple de 8.
La négation est fausse donc la proposition initiale est donc vraie.

Exercice A.2.18 : Respecter le symbole "supérieur stricte".

2. Etudier l'hérédité. Cherchons $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq p,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$
correction. $2^{n+1} = 2^n + 2^n$. Par hypothèse de récurrence, $2^n > n^2$ donc on a $2^{n+1} > 2n^2$. Pour conclure, on cherche p tel que $n \geq p \Rightarrow 2n^2 \geq (n+1)^2$. Cela revient à étudier le signe de $n^2 - 2n - 1$ qui est positif pour les entiers $n \geq p = 3$. En concaténant les résultats on aboutit à $2^{n+1} > (n+1)^2$.
On a donc démontré l'hérédité pour $n \geq p = 3$.
Cependant, $P(3)$ et $P(4)$ sont fausse d'où
Initialisation à $n = 5$. $2^n = 2^5 = 32 > 5^2 = 25$ donc $P(5)$ est vraie.
Conclusion : $\forall\, n \in [\![5, +\infty[\![$, $2^n > n^2$.

Exercice A.2.27 : Pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pose

$$K_f = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\} \quad \text{et} \quad I_f = \{y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}.$$

On note E l'ensemble des applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Il faut comprendre que :
Le symbole $\{\cdots\}$ signifie *l'ensemble de* .
K_f est l'ensemble des solutions x dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$.
I_f est l'ensemble des images par f ou encore $I_f = \mathrm{Im} f = f(\mathbb{R})$.

1. Voir TP2.

2. Soient f, $g \in E$ telles que $f(0) = g(0) = 0$.

(a) Par hypothèse, $0 \in K_f$ et $0 \in I_g$ donc $0 \in K_f \cap I_g$. On vient de démontrer $K_f \cap I_g \neq \emptyset$.

(b) On doit montrer l'implication $x \in K_g \Rightarrow x \in K_{f\circ g}$.
Soit $x \in K_g$. Alors $g(x) = 0$. On calcule $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$. Cela signifie que $x \in K_{f\circ g}$. On vient de démontrer l'inclusion $K_g \subset K_{f\circ g}$.

(c) On doit montrer l'implication $K_f \cap I_g = \{0\} \Rightarrow K_g = K_{f\circ g}$.
<u>hypothèse :</u> $K_f \cap I_g = \{0\}$.
Cela signifie que le seul réel y appartement à la fois à K_f et I_g est $y = 0$.
<u>but :</u> $K_g = K_{f\circ g}$.
D'après (b), on sait que $K_g \subset K_{f\circ g}$. On doit montrer l'inclusion réciproque $K_{f\circ g} \subset K_g$.
Plus précisément, sous l'hypothèse "$K_g \cap I_f = \{0\}$", on doit montrer l'implication $x \in K_{f\circ g} \Rightarrow x \in K_g$.
Soit $x \in K_{f\circ g}$ Alors $f \circ g(x) = f(g(x)) = 0$.
On pose $y = g(x)$. On a évidemment $y \in I_g$. De plus $f(y) = 0$ donc $y \in K_f$.
Finalement $y \in K_f \cap I_g$. D'après l'hypothèse, $y = 0$.
Or $y = g(x)$ donc $g(x) = 0$ et on en déduit que $x \in K_g$.
On vient de démontrer l'inclusion $K_g \subset K_{f\circ g}$. D'après (b), on conclut l'égalité $K_g = K_{f\circ g}$.

3. Soient f, $g \in E$.

(a) On doit montrer l'implication $y \in I_{f\circ g} \Rightarrow y \in I_f$.
Soit $y \in I_{f\circ g}$. Alors $\exists\, x \in \mathbb{R},\ y = f \circ g(x) = f(g(x))$. On pose $x' = g(x)$. Alors $y = f(x')$ et $x' \in \mathbb{R}$. Donc $y \in I_f$. On vient de démontrer l'inclusion $I_{f\circ g} \subset I_f$.

(b) On doit montrer l'implication $I_g = \mathbb{R} \Rightarrow I_{f\circ g} = I_f$.
<u>hypothèse :</u> $I_g = \mathbb{R}$.
Cela signifie que $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R},\ y = g(x)$.
<u>but :</u> $I_{f\circ g} = I_f$.
D'après (a), on sait que $I_{f\circ g} \subset I_f$. On doit montrer l'inclusion réciproque $I_f \subset I_{f\circ g}$.
Plus précisément, sous l'hypothèse "$I_g = \mathbb{R}$", on doit montrer l'implication $z \in I_f \Rightarrow z \in I_{f\circ g}$.
Soit $z \in I_f$. Alors $\exists\, y \in \mathbb{R},\ z = f(y)$.
Par hypothèse, $\exists\, x \in \mathbb{R},\ y = g(x)$.
Par composition, on peut écrire $z = f(g(x)) = f \circ g(x)$. Donc $z \in I_{f\circ g}$.
On vient de démontrer $I_{f\circ g} \subset I_f$. D'après (a), on conclut l'égalité $I_{f\circ g} = I_f$.

Exercice A.2.30 : Dans cet exercice, il est important d'appliquer les indicatrices à un couple $(x, y) \in E \times F$ pour une meilleure comphésion des produits cartésiens.

1. En utilisant l'équivalence

$$(x, y) \in A \times B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ et } y \in B,$$

on peut en déduire que

$$\mathbf{1}_{A\times B}(x, y) = \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y).$$

2. Les hypothèses entrainent les simplifications suivantes

$$C \subset A \subset E \quad \Rightarrow \quad A \cap C = C \quad \Rightarrow \quad \forall x \in E,\ \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_C(x) = \mathbf{1}_C(x) \text{ et } \mathbf{1}_{A\setminus C}(x) = \mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_C(x),$$

$$D \subset B \subset F \quad \Rightarrow \quad B \cap D = D \quad \Rightarrow \quad \forall y \in F,\ \mathbf{1}_B(y) \times \mathbf{1}_D(y) = \mathbf{1}_D(y) \text{ et } \mathbf{1}_{B\setminus D}(x) = \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_D(x).$$

Pour l'ensemble de gauche, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{(A\times B)\setminus(C\times D)}(x, y) &= \mathbf{1}_{(A\times B)}(x, y) - \mathbf{1}_{(A\times B)}(x, y) \times \mathbf{1}_{(C\times D)}(x, y) \\
&= \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) \times \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_D(y) \\
&= \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_D(y).
\end{aligned}$$

Pour l'ensemble de droite , on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{((A\setminus C)\times B)\cup(C\times(B\setminus D))}(x, y) &= \mathbf{1}_{((A\setminus C)\times B)}(x, y) + \mathbf{1}_{(C\times(B\setminus D))}(x, y) - \mathbf{1}_{((A\setminus C)\times B)}(x, y) \times \mathbf{1}_{(C\times(B\setminus D))}(x, y) \\
&= \mathbf{1}_{((A\setminus C)}(x) \times \mathbf{1}_B(y) + \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_{((B\setminus D)}(y) - \underbrace{\mathbf{1}_{((A\setminus C)}(x) \times \mathbf{1}_B(y) \times \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_{((B\setminus D)}(y)}_{=0} \\
&= \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_B(y) + \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_D(y) \\
&= \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_D(y).
\end{aligned}$$

Les deux ensembles sont égaux.