

Chapitre 1. Corrigés des exercices.

Exercice A.2.27 : Pour toute application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on pose

$$K_f = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\} \quad \text{et} \quad I_f = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}.$$

On note E l'ensemble des applications définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Il faut comprendre que :

Le symbole $\{\dots\}$ signifie *l'ensemble de*.

K_f est l'ensemble des solutions x dans \mathbb{R} de l'équation $f(x) = 0$.

I_f est l'ensemble des images par f ou encore $I_f = \text{Im} f = f(\mathbb{R})$.

1. • La proposition " $\forall f \in E, K_f \neq \emptyset$ " est fautive car sa négation " $\exists f \in E, K_f = \emptyset$ " est vraie. Un exemple est la fonction constante suivante :

$$\begin{array}{lcl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto 1 \end{array}$$

• La proposition " $\forall f \in E, I_f \neq \emptyset$ " est vraie par définition d'une application. En effet, si $f \in E$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x) \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x) \Rightarrow I_f \neq \emptyset.$$

Exercice A.2.28.

$$1. (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \cap \underset{E}{\complement}(B \cap C) = (A \cap C) \cap (\underset{E}{\complement}B \cup \underset{E}{\complement}C) = (A \cap C \cap \underset{E}{\complement}B) \cup \underbrace{(A \cap C \cap \underset{E}{\complement}C)}_{=\emptyset} = A \cap C \cap \underset{E}{\complement}B.$$

$$(A \setminus B) \cap C = A \cap \underset{E}{\complement}B \cap C.$$

$$(A \cap C) \setminus B = A \cap C \cap \underset{E}{\complement}B.$$

$$(C \setminus B) \cap A = C \cap \underset{E}{\complement}B \cap A.$$

Par commutativité de \cap , tous ces ensembles sont égaux.

2. Ne pas utiliser la question 1. Appliquer les formules de transformations de \cap , \cup et \setminus en produit, somme et différence :

$$\mathbf{1}_{(A \cap C) \setminus (B \cap C)} = \mathbf{1}_{A \cap C} - \mathbf{1}_{A \cap C} \times \mathbf{1}_{B \cap C} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_C - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_C \times \mathbf{1}_B \times \mathbf{1}_C = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_C - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_C \times \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_C \times (1 - \mathbf{1}_B).$$

$$\mathbf{1}_{(A \setminus B) \cap C} = \mathbf{1}_{A \setminus B} \times \mathbf{1}_C = (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B) \times \mathbf{1}_C = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_C \times (1 - \mathbf{1}_B)$$

$$\mathbf{1}_{(A \cap C) \setminus B} = \mathbf{1}_{A \cap C} - \mathbf{1}_{A \cap C} \times \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_C - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_C \times \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_C \times (1 - \mathbf{1}_B)$$

$$\mathbf{1}_{(C \setminus B) \cap A} = \mathbf{1}_{C \setminus B} \times \mathbf{1}_A = (\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_C \times \mathbf{1}_B) \times \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_C \times (1 - \mathbf{1}_B).$$

Les quatres indicatrices sont égales.

Exercice A.2.29.

1. Faire une figure pour distinguer l'ensemble $A\Delta B$. Puis utiliser l'exercice précédent.

$$\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{B\setminus A} = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$$

$$\Rightarrow \mathbf{1}_{A\Delta B} = (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B) + (\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B) - \underbrace{(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B) \times (\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B)}_{=0} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \times \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B.$$

2. On a

$$(A\Delta B) \cap C = ((A\setminus B) \cup (B\setminus A)) \cap C = ((A\setminus B) \cap C) \cup ((B\setminus A) \cap C) = (A \cap \complement_E B \cap C) \cup (\complement_E A \cap B \cap C)$$

et

$$\begin{aligned} (A \cap C) \Delta (B \cap C) &= ((A \cap C) \setminus (B \cap C)) \cup ((B \cap C) \setminus (A \cap C)) \\ &= ((A \cap C) \cap \complement_E (B \cap C)) \cup ((B \cap C) \cap \complement_E (A \cap C)) \\ &= ((A \cap C) \cap (\complement_E B \cup \complement_E C)) \cup ((B \cap C) \cap (\complement_E A \cup \complement_E C)) \\ &= ((A \cap C \cap \complement_E B) \cup \underbrace{(A \cap C \cap \complement_E C)}_{=\emptyset}) \cup ((B \cap C \cap \complement_E A) \cup \underbrace{(B \cap C \cap \complement_E C)}_{=\emptyset}) \\ &= (A \cap C \cap \complement_E B) \cup (B \cap C \cap \complement_E A). \end{aligned}$$

Par associativité de l'intersection, les deux ensembles sont égaux.

3. Calculer les indicatrices des deux ensembles : utiliser la question 1.

$$\mathbf{1}_{(A\Delta B) \cap C} = (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \times \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B) \times \mathbf{1}_C$$

$$(A \cap C) \Delta (B \cap C) = \mathbf{1}_{A \cap C} + \mathbf{1}_{B \cap C} - 2 \times \mathbf{1}_{A \cap C} \times \mathbf{1}_{B \cap C} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B \times \mathbf{1}_C - 2 \times \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B \times \mathbf{1}_C$$