Chapitre 2. Corrigés des exercices.

Exercice A.2.6 :

1. Pour $y \in \mathbb{R}$ on détermine le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$:

$$\frac{2x}{1+x^2} = y \Leftrightarrow 2x = y(1+x^2) \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0.$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré ssi $y \neq 0$.

A finir !

1. Si $y = 0$ alors l'équation admet une unique solution $x = 0$.
2. Si $y \neq 0$ alors les résultats dépendent du signe du discriminant :
   • Si $\Delta = 4 - 4y^2 < 0$ alors l'équation $y = f(x)$ n'admet aucune solution.
   Les valeurs $y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ n'admettent aucun antécédent par f. Donc f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   • Si $\Delta = 4 - 4y^2 > 0$, l'équation admet exactement 2 solutions distinctes :

$$\exists x_1 = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \in \mathbb{R},\ \exists x_2 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2) = y.$$

   La fonction f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Cela équivaut à la condition $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-1, 1]$.

3. Si $y = \pm 1$ alors $\Delta = 0$ et y admet un seul antécédent $x = y$.
On a déjà vu que $y = 0$ admet une seule antécédent $x = 0$.
Si $y \in]-1, 0[\cup]0, 1[$ alors

$$1 + \sqrt{1-y^2} > 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} > \frac{1}{y} > 1 \text{ si } 0 < y < 1 \\ \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} < \frac{1}{y} < -1 \text{ si } -1 < y < 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 \notin [-1, 1].$$

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{1-y^2} > 1 \Rightarrow & 1 - \sqrt{1-y^2} < (1-\sqrt{1-y^2})(1+\sqrt{1-y^2}) = y^2 \\ & \Rightarrow \begin{cases} 0 < x_2 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} < y < 1 \text{ si } 0 < y < 1 \\ -1 < y < x_2 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} < 0 \text{ si } -1 < y < 0. \end{cases} \Rightarrow \quad x_2 \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

Finalement $\forall\, y \in [-1, 1], \exists\, x \in [-1, 1],\ y = f(x)$. Autrement dit, $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ est bijective et

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Exercice A.2.3 :

1. Soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$, montrer que l'équation $\vec{y} = f(\vec{x})$ admet une unique solution.
Avec les notations $\vec{y} = (y_1, y_2)$ et $\vec{x} = (x_1, x_2)$, cela revient à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + x_2 & = & y_1 & (L_1) \\ 2x_1 + 3x_2 & = & y_2 & (L_2) \end{array} \right.$$

Par la méthode d'élimination, on a :

$$L_2 - 2 \times L_1 \Leftrightarrow \boxed{x_2 = y_2 - 2y_1} \quad \text{et} \quad L_2 - 3 \times L_1 \Leftrightarrow -x_1 = y_2 - 3y_1 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 3y_1 - y_2}$$

Le système admet une unique solution.
<u>Conclusion :</u> $\forall\, \vec{y} \in \mathbb{R}^2,\ \exists!\, \vec{x} = (3y_1 - y_2, y_2 - 2y_1) \in \mathbb{R}^2,\ \vec{y} = f(\vec{x}) \Leftrightarrow f$ est bijective.

2. Pour la non injectivité : Écrire la négation de « f est injective » :

$$\exists(\vec{x}, \vec{x'}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ \vec{x} \neq \vec{x'} \text{ et } f(\vec{x}) = f(\vec{x'}).$$

Justifier cette phrase : trouver par exemple deux vecteurs distincts dont les images sont égales au vecteur nul.

Poser $\vec{x} = (0, 0)$ et $\vec{x'} = (3, 2)$. On a bien $f(\vec{x}) = f(\vec{x'}) = \vec{0}$ et $\vec{x} \neq \vec{x'}$.

Pour la surjectivité : résoudre, pour $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ fixé, l'équation $\vec{y} = f(\vec{x})$. Posons le système

$$\left\{ \begin{array}{rcll} 2x_1 - 3x_2 & = & y_1 & (L_1) \\ -4x_1 + 6x_2 & = & y_2 & (L_2) \end{array} \right. \quad \underset{2 \times L_1 + L_2}{\Rightarrow} \quad 0 = 2y_1 + y_2$$

Par contraposée, pour tout vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 \neq 2y_1 + y_2$, le système n'admet aucune solution.
La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ n'est donc pas surjective.

Exercice A.2.4 :

2.

$$\text{montrons que} \quad (\ f \text{ surjective et } g \text{ surjective} \quad \Rightarrow \quad g \text{ injective}\ )$$

hyp : $\forall y \in B,\ \exists x \in A, y = f(x)$ et $\forall z \in C,\ \exists y \in B, z = g(y)$
but : $\forall z \in C,\ \exists x \in A, z = g \circ f(x)$
dém : Soit $z \in C$. Comme g est surjective, on sait qu'$\exists y \in B, z = g(y)$ (#).
Comme f est surjective, on sait qu'$\exists x \in A, y = f(x)$.
Par substitution dans (#), on a $z = g(f(y)) = g \circ f(y)$.
La proposition avec quantificateurs de la surjectivité de $g \circ f$ est démontrée.

5. On démontre plutôt la contraposée de l'implication énconcée :

$$\text{montrons que} \quad (\ g \circ f \text{ surjective} \quad \Rightarrow \quad g \text{ surjective}\ )$$

hyp : $\forall z \in C,\ \exists x \in A, z = g \circ f(x)$
but : $\forall z \in C,\ \exists y \in B, z = g(y)$
dém : Soit $z \in C$. Par hypothèse, il existe un élément $x \in A$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$.
On pose $y = f(x)$. On a $y \in B$ et par substitution $z = g(y)$.
La proposition avec quantificateurs de la surjectivité de g est démontrée.
conclusion : la contraposée est démontrée donc l'implication initiale

$$(\ g \text{ n'est pas surjective} \quad \Rightarrow \quad g \circ f \text{ n'est pas surjective})$$

est vraie.

6.

$$\text{montrons que} \quad (\ g \circ f \text{ injective et } f \text{ surjective} \quad \Rightarrow \quad g \text{ injective}\ )$$

hyp 1 : $\forall (x, x') \in A^2,\ (g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x')$
hyp 2 : $\forall y \in B,\ \exists x \in A, y = f(x)$
but : $\forall (y, y') \in B^2,\ (g(y) = g(y') \Rightarrow y = y')$
dém : Soient $y \in B$ et $y' \in B$ tel que $g(y) = g(y')$. Comme f est surjective (hyp 2), y et y' admettent des antécédents par f qu'on note x et x' respectivement : on a $\boxed{y = f(x) \text{ et } y' = f(x')}$.
Par substitution, on obtient $g(f(x)) = g(f(x')) \Leftrightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Comme $g \circ f$ est injective (hyp 1), on en déduit que $x = x'$. En appliquant la fonction f à cette dernière égalité, on a $f(x) = f(x')$. Autrement dit, on a $y = y'$.
La proposition avec quantificateurs de l'injectivité de g est démontrée.

7.

$$\text{montrons que} \quad (\ g \circ f \text{ surjective et } g \text{ injective} \quad \Rightarrow \quad f \text{ surjective}\ )$$

hyp 1 : $\forall z \in C,\ \exists x \in A, z = g \circ f(x)$
hyp 2 : $\forall (y, y') \in B^2,\ (g(y) = g(y') \Rightarrow y = y')$
but : $\forall y \in B,\ \exists x \in A, y = f(x)$
dém : Soit $y \in B$. On applique la fonction g à y pour obtenir un élément $z = g(y) \in C$. On peut ainsi appliquer l'hypothèse 1 : il existe $x \in A$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$.
Finalement on a l'égalité $g(y) = g(f(x))$. Comme g est injective (hyp 2), on en déduit que $y = f(x)$.
La proposition avec quantificateurs de la surjectivité de f est démontrée