

Chapitre 2. Corrigés des exercices.

Exercice A.2.5 :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ x & \mapsto & f(x) = y & \mapsto & g(y) = g \circ f(x) = g(f(x)) & & y & \mapsto & g(y) = z & \mapsto & h(z) = h \circ g(y) = h(g(y)) \end{array}$$

On suppose que les composées sont $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.

1. A l'aide de l'exercice **A.2.4**, on montre que g est bijective. En effet, on a d'après les contraposées des questions **4.** et **5.**, en remplaçant g par h et f par g ,

$$(h \circ g \text{ injective} \Rightarrow g \text{ injective})$$

$$(g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective})$$

D'après le cours

$$g \text{ injective et } g \text{ surjective} \Leftrightarrow g \text{ bijective.}$$

Pour terminer on a les implications du cours suivantes :

$$g \circ f \text{ bijective et } g \text{ bijective} \Rightarrow g \circ f \text{ bijective et } g^{-1} \text{ bijective} \Rightarrow g^{-1} \circ (g \circ f) = id_B \circ f = f \text{ bijective}$$

et

$$h \circ g \text{ bijective et } g \text{ bijective} \Rightarrow h \circ g \text{ bijective et } g^{-1} \text{ bijective} \Rightarrow (h \circ g) \circ g^{-1} = h \circ id_C = h \text{ bijective}$$

2. On utilise les formules du cours pour exprimer f_1 et h_1 en fonction de f^{-1} , g^{-1} et h^{-1} . On a

$$f_1 = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \quad \text{et} \quad h_1 = (h \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}.$$

On obtient

$$f_1 \circ g = (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g = f^{-1} \circ id_B = f^{-1}$$

$$f \circ f_1 = f \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = id_B \circ g^{-1} = g^{-1}$$

$$h_1 \circ h = (g^{-1} \circ h^{-1}) \circ h = g^{-1} \circ id_C = g^{-1}$$

$$g \circ h_1 = g \circ (g^{-1} \circ h^{-1}) = id_C \circ h^{-1} = h^{-1}$$

Exercice 2 hors poly : Soit A une partie de \mathbb{R} .

1. Démontrer que si A admet un plus grand élément $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\sup A$ existe et $\sup A = \alpha$.

hypothèse : $\exists \alpha \in A, \forall x \in A, x \leq \alpha$.

but : α est le plus petit des majorants de A .

preuve : L'ensemble A est une partie non vide ($\alpha \in A$) et majorée (par α) de \mathbb{R} donc $\sup A$ existe.

Il reste à démontrer que $\alpha = \sup A$:

$$\sup A \text{ est un majorant de } A \text{ et } \alpha \in A \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq \sup A$$

$$\alpha \text{ est un majorant et } \sup A \text{ est le plus petit des majorants} \quad \Rightarrow \quad \sup A \leq \alpha.$$

On en déduit que $\alpha = \sup A$.

2. Démontrer que si A admet un plus petit élément $\beta \in \mathbb{R}$ alors $\inf A$ existe et $\inf A = \beta$.

hypothèse : $\exists \beta \in A, \forall x \in A, \beta \leq x$.

but : β est le plus grand des minorants de A .

preuve : L'ensemble A est une partie non vide ($\beta \in A$) et minorée (par β) de \mathbb{R} donc $\inf A$ existe.

Il reste à démontrer que $\beta = \inf A$:

$$\inf A \text{ est un minorant de } A \text{ et } \beta \in A \quad \Rightarrow \quad \inf A \leq \beta$$

$$\beta \text{ est un minorant et } \inf A \text{ est le plus grand des minorants} \quad \Rightarrow \quad \beta \leq \inf A.$$

On en déduit que $\beta = \inf A$.

Exercice A.2.12 : Soient A et B deux parties non vides et bornées de \mathbb{R} telles que $A \subset B$.

1. Montrons que $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$ existent.

D'après l'énoncé, les ensembles A et B sont non vides et bornées (\Leftrightarrow majorés et minorés) dans \mathbb{R} . D'après les axiomes des bornes inférieures et supérieures, les quatre éléments $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$ existent.

2. Montrons que $\sup A \leq \sup B$.

dém : Par définition, $\sup B$ est un majorant de B . Ce qui s'écrit $\forall x \in B, x \leq \sup B$.

Comme $A \subset B$, on peut écrire $\forall x \in A, x \leq \sup B$. Autrement dit, $\sup B$ est un majorant de A .

Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A , on obtient $\sup A \leq \sup B$.

3. Montrons que $\inf B \leq \inf A$.

dém : Par définition, $\inf B$ est un minorant de B . Ce qui s'écrit $\forall x \in B, \inf B \leq x$.

Comme $A \subset B$, on peut écrire $\forall x \in A, \inf B \leq x$. Autrement dit, $\inf B$ est un minorant de A .

Comme $\inf A$ est le plus grand des minorants de A , on obtient $\inf B \leq \inf A$.

Exercice A.2.11 : Soient A et B deux parties non vides de \mathbb{R} telles que

$$\forall (a, b) \in A \times B, a < b.$$

1. • Tout d'abord on montre que $\inf B$ existe :

L'hypothèse peut s'écrire : $\forall a \in A, \underbrace{\forall b \in B, a < b}_{\Leftrightarrow a \text{ minore } B} \Rightarrow \forall a \in A, B \text{ est minoré par } a.$

Comme $A \neq \emptyset$, on en déduit $\exists a \in A$ et B est bien un ensemble minoré par a .

D'après l'axiome de la borne inférieure, $\inf B$ existe.

NB : le symbole \forall n'implique pas le symbole \exists !!!

• On montre que $\sup A$ existe de la même façon :

On peut intervertir les quantificateurs : $\forall b \in B, \underbrace{\forall a \in A, a < b}_{\Leftrightarrow b \text{ majore } A} \Rightarrow \forall b \in B, A \text{ est majoré par } b.$

Comme $B \neq \emptyset$, on en déduit $\exists b \in B$ et A est bien un ensemble majoré par b .

D'après l'axiome de la borne supérieure, $\sup A$ existe.

2. On commence la démonstration pour l'hypothèse

$$\forall b \in B, A \text{ est majoré par } b$$

Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A , on peut écrire

$$\forall b \in B, \sup A \leq b$$

Cette dernière phrase se réinterprète par : $\sup A$ est un minorant de l'ensemble B .

Comme $\inf B$ est le plus grand des minorants, on peut écrire : $\sup A \leq \inf B$.

3. La réponse est NON pour des A et B quelconques. Un contre exemple est

$$A =]-\infty, 0] \quad \text{et} \quad B =]0, +\infty[.$$

On a bien $\forall (a, b) \in A \times B, a \leq 0 < b$ et pourtant $\sup A = 0 = \inf B$.

Exercice A.2.14 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application croissante. On pose

$$B = \{x \in [0, 1]; f(x) \geq x\}.$$

1. Par hypothèse, l'espace d'arrivée de f est $[0, 1]$. Cela signifie que $\text{Im} f \subset [0, 1]$ et donc

$$\forall x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1] \Rightarrow f(0) \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq f(0) \leq 1.$$

On en déduit que $0 \in B$ et donc $B \neq \emptyset$.

2. Par définition de l'ensemble B , on a $B \subset [0, 1]$ donc B est majoré par 1. L'ensemble B est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} donc d'après l'axiome de la borne supérieure, $b = \sup B$ existe.

D'après la question **1.**, on sait que $0 \in B$ et b est un majorant de B donc $b \geq 0$.

Sachant que 1 est un majorant de B et que b est le plus petit des majorants, on en déduit que $b \leq 1$. En conclusion, $0 \leq b$ et $b \leq 1$ donc $b \in [0, 1]$.

3. Puisque b est la borne supérieure de B on peut écrire $\forall x \in B, x \leq b$.

On applique la fonction f qui est croissante pour obtenir $\forall x \in B, f(x) \leq f(b)$.

Comme $x \in B \Rightarrow f(x) \geq x$, on en déduit que $\forall x \in B, x \leq f(b)$. Ceci signifie que $f(b)$ est un majorant de B .

Comme b est le plus petit des majorants, on a $b \leq f(b)$.

On rappelle que $b \in [0, 1]$ d'après la question **2.**

En conclusion, on a $b \in B$.

4. Soit $x \in B$. Alors $x \in [0, 1]$ et $x \leq f(x)$.

On applique la fonction f . D'une part $\text{Im} f \subset [0, 1] \Rightarrow f(x) \in [0, 1]$.

D'autre part, f est croissante donc $f(x) \leq f(f(x))$.

Cela signifie que $f(x) \in B$.

5. On utilise l'antisymétrie de la relation d'ordre \leq .

Pour montrer que $b = f(b)$, on montre que $f(b) \leq b$ et $b \leq f(b)$.

On a déjà montré à la question **3.** que $b \leq f(b)$ et que $b \in B$.

D'après la question **4.**, $b \in B \Rightarrow f(b) \in B$. Comme b est la borne supérieure de B on a $f(b) \leq b$.

En conclusion $b = f(b)$. On dit que b est un point fixe de f .

6. La réponse est non. Prendre comme contre-exemple, une fonction non continue définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La fonction f est bien une application de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et décroissante. Cependant l'équation $f(x) = x$ n'admet aucune solution.