Chapitre 5. Exercice A.2.1-question 1 Application de la formule de dérivation

$$(g\circ f)'(x) = f'(x)\times g'(f(x)).$$

• $g\circ f(x) = \ln|\tan\frac{x}{2}|$ sur $]-\pi,\pi[\backslash\{0\}$.
On pose $\forall\, t\in\mathbb{R}^*,\ g(t)=\ln|t|$, puis $\forall\, x\in]-\pi,\pi[,\ f(x)=\tan\frac{x}{2}$

$$g'(t) = \begin{cases} \frac{-1}{-t}=\frac{1}{t} & \text{si } t<0 \\ \frac{1}{t} & \text{si } t>0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\tan'(\frac{x}{2})$$

$$\tan'(\theta) = \frac{\cos\theta\times\cos\theta-(-\sin\theta)\times\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Finalement,

$$(g\circ f)'(x) = f'(x)\times g'(f(x)) = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\times\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

• $g\circ f(x)=\cos^2(3\sin(4x))$ sur $\mathbb{R}$.
On pose $\forall\, t\in\mathbb{R},\ g(t)=\cos^2 t$ et $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)=3\sin(4x)$.

$$g'(t) = -2\sin t\cos t = -\sin(2t) \text{ et } f'(x)=12\cos(4x).$$

On obtient

$$(g\circ f)'(x) = f'(x)\times g'(f(x)) = 12\cos(4x)\times(-\sin(6\sin(4x)) = -12\cos(4x)\sin(6\sin(4x)).$$

Chapitre 5. Exercice A.2.11 Dérivée de fonctions paires et impaires

• On montre que si f est une application définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et paire alors sa dérivée première est une fonction impaire.

$$f'(-a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-a+h)-f(-a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h} \underset{①}{=} \lim_{k\to 0} \frac{f(a+k)-f(a)}{-k} = -f'(a),$$

où dans ①, on a effectué le changement de variable $k = -h \underset{h\to 0}{\to} 0$.

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad f'(-a) = -f'(a).$$

• On montre que si f est une application définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et impaire alors sa dérivée première est une fonction paire.

$$\begin{aligned} f'(-a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-a+h)-f(-a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{-f(a-h)+f(a)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h} = -\lim_{k\to 0} \frac{f(a+k)-f(a)}{-k} = -(-f'(a)) = f'(a). \end{aligned}$$

Chapitre 5. Exercice hors poly

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = x^3\cos(\frac{1}{x})$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en $a = 0$ en une fonction $\tilde{f}$ à préciser.

2. Montrer $\tilde{f}$ est dérivable en $a = 0$.

3. Calculer $\tilde{f}'(x)$ pour $x \neq 0$.

4. Justifier que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. Montrer que $\tilde{f}$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Correction

1. Par produit et composition de fonctions usuelles continues (polynôme, cosinus et fonction inverse), la fonction f est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. En $a = 0$,

$$\left\{\begin{array}{l} x^3 \underset{x\to 0}{\to} 0 \\ x \mapsto \cos(\frac{1}{x}) \text{ est bornée} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Par conséquent, la fonction f est prolongeable en une fonction $\tilde{f}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = \left\{\begin{array}{ll} x^3\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array}\right.$$

On dit que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

2. On détermine la limite du taux d'accroissement de $\tilde{f}$ en $a = 0$:

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = \frac{x^3\cos(\frac{1}{x}) - 0}{x} = x^2\cos(\tfrac{1}{x}).$$

Avec les mêmes arguments, on obtient que

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 \underset{x\to 0}{\to} 0 \\ x \mapsto \cos(\frac{1}{x}) \text{ est bornée} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = 0.$$

3. Pour $x \neq 0$, on a $\tilde{f}'(x) = 3x^2\cos(\frac{1}{x}) + x\sin(\frac{1}{x})$.

4. Par somme, produit et composition de fonctions usuelles continues, l'expression $x \mapsto 3x^2\cos(\frac{1}{x}) + x\sin(\frac{1}{x})$ définit une fonction continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
De plus,

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2 \underset{x\to 0}{\to} 0 \\ x \mapsto \cos(\frac{1}{x}) \text{ est bornée} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} 3x^2\cos(\tfrac{1}{x}) = 0.$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} x \underset{x\to 0}{\to} 0 \\ x \mapsto \sin(\frac{1}{x}) \text{ est bornée} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} x\sin(\tfrac{1}{x}) = 0.$$

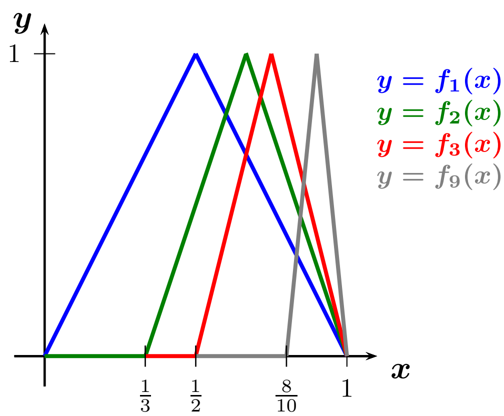
On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}'(x) = 0 = \tilde{f}'(0)$. Ce qui traduit la continuité de $\tilde{f}'$ en $a = 0$ également. On dit que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. La fonction $\tilde{f}$ est évidemment deux fois dérivable en $a \neq 0$ (car l'expression de $\tilde{f}'(x)$ est dérivable) et $x \mapsto \tilde{f}''(x) = (6x - \frac{1}{x})\cos(\frac{1}{x}) + 4\sin(\frac{1}{x})$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. On peut dire que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
En $a = 0$, on étudie le taux d'accroissement de $\tilde{f}'$:

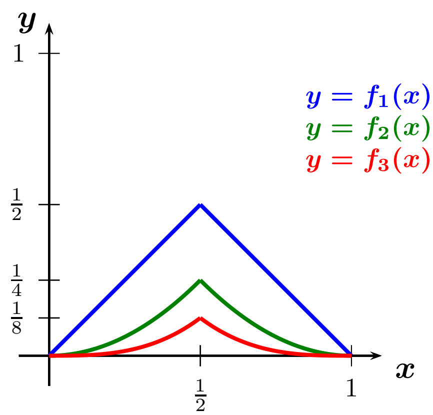
$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 3x\cos\tfrac{1}{x} + \sin\tfrac{1}{x}$$

Celui-ci n'admet pas de limite quand $x \to 0$ à cause du second terme.
La fonction f n'est pas deux fois dérivable en 0. On ne peut pas dire que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 4 - Exercice A.2.17



(i)



(ii)

2. • Dans le cas (i), on montre que pour x$\in [0,1]$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ f_n(x) = 0$:

$$\text{on résout } x \leq \frac{n-1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)x \leq n-1 \quad \Leftrightarrow \quad 1+x \leq n - nx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+x}{1-x} \leq n$$

On propose $N = E(\frac{x+1}{1-x}) + 1$.
Cela montre qu'à partir du rang N, la suite $(f_n(x))$ est constante égale à 0 et donc converge vers 0.
La suite (f_n) converge simplement sur $D = [0,1]$ vers la fonction identiquement nulle.

• Dans le cas (ii), on voit bien que les courbes représentatives des fonctions f_n convergent vers l'axe des abscisses. On décompose les fonctions f_n comme suit

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (1-x)^n & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Les résultats sur les suites géométriques entrainent

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 1-x \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (1-x)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

La suite (f_n) converge simplement sur $D = [0,1]$ vers la fonction identiquement nulle.

3. On pose $(u_n) = \sup\{|f_n(x)|;\ x \in D\}$.
• Pour (i) on voit graphiquement, qu'il n'y a pas convergence uniforme. Ici, on voit graphiquement, que $u_n = f(\frac{n}{n+1}) = 1$. La suite $\big(u_n\big)$ est constante égale à 1 donc ne converge pas vers 0.

• Pour (ii) on voit graphiquement qu'il y a convergence uniforme.
Ici, $u_n = f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Chapitre 5 - Exercice A.2.25. Convergence uniforme de suites de fonctions

1. $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
$f_n(1) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = 0$.
Pour $x \in]0,1[$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

2. Tout d'abord, on remarque que $\forall\, x \in [0,1],\ f_n(x) \leq 0$ donc $|f_n(x)| = -f_n(x)$.
Pour $x \in]0,1[$, on calcule $f_n'(x) = (nx^{n-1}\ln x + x^n \times \frac{1}{x}) = x^{n-1}(n\ln x + 1)$.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$e^{-\frac{1}{n}}$		1
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{ne}$	$\nearrow$	0
$\lvert f_n(x)\rvert$	0	$\nearrow$	$u_n = \frac{1}{ne}$	$\searrow$	0

3. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [0,1],\ |f_n(x) - f(x)| \leq u_n$ avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $f(x) = 0$.
La convergence de (f_n) vers f est donc uniforme sur $D = [0,1]$.

Chapitre 5 - Exercice A.2.26. Convergence non uniforme de suites de fonctions

1. On sait que $te^{-t} = \frac{t}{e^t} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$.

Pour $x \in]0, +\infty[$ fixé, on a par composition de limites $nxe^{-nx} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{0}{1-e^{-x}} = 0$.

2. D'après **1.** on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = 0$.

Pour $n \geq 1$ fixé, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{1-e^{-x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{1}{\frac{e^{-x}-1}{x}} = -\frac{1}{-1} = 1$. D'où

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = n \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to 0^+} f_n(x) \right) = +\infty.$$

3. Pour toutes suites de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f, on peut intervertir les limites entre les variables n et x.

Par conséquent, (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction identiquement nulle.

4. On propose une suite $(x_n) \subset D$, telle que $(|f_n(x_n)|)$ ne converge pas vers 0.

Prenons $x_n = \frac{1}{n} \in D$. Alors, $f(\frac{1}{n}) = \frac{e^{-1}}{1-e^{-\frac{1}{n}}} \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq |f_n(x_n)|$, on en déduit que la suite (u_n) ne converge pas vers 0 non plus. La convergence n'est pas uniforme.