Chapitre 5. Exercice A.2.6

3. On pose $f(x) = x^3$ et $g(x) = e^x$. Les fonctions f et g sont au moins 5 fois dérivables. La formule de Leibniz est

$$(fg)^{(5)}(x) = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} f^{(5-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

• On note d'avance que $f^{(4)}$ et $f^{(5)}$ sont nulles et $\forall k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}(x) = e^x$.
• Triangle de Pascal jusque $n = 5$:

1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

$$(fg)^{(5)}(x) = 1 \times (x^3)e^x + 5 \times (3x^2)e^x + 10 \times (6x)e^x + 10 \times (6)e^x + 0 + 0 = e^x(x^3 + 15x^2 + 60x + 60).$$

4. • Calcul de la dérivée n-ième de $(x^2+1)e^x$:
On pose $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2 + 1$. On sait que la dérivée 3ème de g s'annule et $f^{(k)}(x) = e^x$ donc

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) &= \binom{n}{0} f^{(n)}(x)g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x)g'(x) + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x)g''(x) + \mathbf{0}\cdots \\ &= e^x(x^2+1) + ne^x(2x) + \frac{n(n-1)}{2}e^x \times 2 \\ &= e^x(x^2 + 2nx + n(n-1) + 1)\end{aligned}$$

• Calcul de la dérivée n-ième de $x^2(x+1)^n$:
On pose $f(x) = x^2$ et $g(x) = (x+1)^n$. On sait que la dérivée 3ème de f s'annule et $g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}$ donc

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) &= \binom{n}{0} f(x)g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f'(x)g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} f^{(2)}(x)g^{(n-2)}(x) + \mathbf{0}\cdots \\ &= x^2 \times \frac{n!}{0!} + n \times 2x \times \frac{n!}{1!}(x+1) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \times \frac{n!}{2!}(x+1)^2 \\ &= n!(x^2 + 2nx(x+1) + \tfrac{n(n-1)}{2}(x+1)^2)\end{aligned}$$

Chapitre 5. Exercice hors poly. Fonction convexe, fonction concave

Soient f et g deux fonction définies sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = e^x - \ln x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(\ln(1+x)) - x^2.$$

1. Montrer que les fonctions f' et g' s'annulent au moins une fois dans l'intervalle $]\frac{1}{2},1[$.
(Indication : appliquer le TVI à f' et g'.)

2. Calculer $f''(x)$ et $g''(x)$.

3. Sans dresser le tableau de variation, justifier l'existence d'un extremum global pour les fonctions f et g. Puis préciser leur nature.

Correction. 1. Les fonctions f et g sont au moins de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ par somme et composition de fonctions usuelles (polynômes, exp et ln).
On calcule les dérivées premières :

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} - 2x.$$

• On a $f'(1) = e - 1 > 0$ et $f'(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - 2 < 0$ (car $e < 4$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists\, c_1 \in]\frac{1}{2},1[,\ f'(c_1) = 0$.
• On a $g'(1) = \frac{1}{2\ln(2)} - 2 < 0$ car $\ln(2) > \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{\ln(2)} < 2$
et $g'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{3}{2}\ln(\frac{3}{2})} - 1 > \frac{1}{2\ln(\frac{3}{2})} - \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{\ln(\frac{9}{4})} - \frac{1}{\ln e} > 0$ car $\frac{9}{4} < e$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists\, c_2 \in]\frac{1}{2},1[,\ g'(c_2) = 0$.

2.

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} \qquad \text{et } g''(x) = -\frac{\ln(1+x)+1}{(1+x)^2\ln^2(1+x)} - 2$$

3. • On remarque que $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ f''(x) \geq 0$ donc f est convexe. Comme f' s'annule en c_1, on en déduit que $f(c_1)$ est le minimum global de f sur $]0,+\infty[$.
• On remarque que $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ g''(x) \leq 0$ donc g est concave. Comme g' s'annule en c_2, on en déduit que $g(c_2)$ est le maximum global de g sur $]0,+\infty[$.

Chapitre 5. Exercice A.2.14

2. On pose $\phi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$. On remarque que le résultat voulu est équivalent à obtenir $\phi'(c) = 0$ car g' ne s'annule pas sur $]a\,;b[$. On applique le théorème de Rolle à la fonction ϕ.

• La fonction ϕ est continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$ car f et g le sont.

• Il reste à montrer que $\phi(a) = \phi(b)$.

$$\phi(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) = \frac{f(a)(g(b)-g(a)) - g(a)(f(b)-f(a))}{g(b)-g(a)} = \frac{f(a)g(b)-g(a)f(b)}{g(b)-g(a)}$$

$$\phi(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(b) = \frac{f(b)(g(b)-g(a)) - g(b)(f(b)-f(a))}{g(b)-g(a)} = \frac{-f(b)g(a)+g(b)f(a)}{g(b)-g(a)} = \phi(a)$$

On en déduit qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $\phi'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Chapitre 5. Exercice A.2.16
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| < q < 1. \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On doit montrer que la suite récurrente définie comme suit

$$\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

converge vers 0.

Remarque : $u_1 = f(u_0) = f(x) = f^1(x)$
$u_2 = f(u_1) = f(f(x)) = f \circ f(x) = f^2(x)$
$u_3 = f(u_2) = f(f \circ f(x)) = f \circ f \circ f(x) = f^3(x)$
$\vdots$
$u_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(x) = f^n(x)$

Enoncé supplémentaire : en supposant que f est croissante, montrer ensuite que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Démonstration de $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$:

(i) Étape 1 : Montrons que f est lipschitzienne de rapport $0 < q < 1$.
On applique l'égalité des accroissements finis pour f entre $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}$, $x \neq x'$.
La fonction f est continue sur $[x, x']$ (ou $[x', x]$) et dérivable sur $]x, x'[$ (ou $]x', x[$). D'après le T.A.F. on sait qu'il existe $c \in]x, x'[$ ou $(c \in]x', x[)$ tel que

$$f(x') - f(x) = f'(c)(x' - x)$$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x)| = |f'(c)||x' - x|$$

$$\underset{|f'(c)|<q}{\Rightarrow} |f(x') - f(x)| \leq q|x' - x|$$

Cette inégalité est bien entendu satisfaite dans le cas $x = x'$. On a donc

$$\boxed{\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ |f(x') - f(x)| \leq q|x' - x|.}$$

On en déduit que f est contractante et admet un unique point fixe $\ell = 0$.

(ii) Étape 2 : 0 est un point fixe de f, autrement dit $f(0) = 0$. On pose $x' = 0$ et $x = u_n$ pour obtenir

$$|f(0) - f(u_n)| \leq q|0 - u_n| \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{|f(u_n)| = |u_{n+1}| \leq q|u_n|}$$

(iii) Étape 3 : on montre par récurrence que

$$\forall n \geq 0,\ |u_n| \leq q^n|u_0|$$

Initialisation à $n = 0$: $|u_0| = q^0|u_0|$, l'égalité entraîne l'inégalité
Hérédité : on pose $H(n) :=$ « $|u_n| \leq q^n|u_0|$ ». On doit montrer que $H(n) \Rightarrow H(n+1)$.
On a,

$$u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow |u_{n+1}| = |f(u_n)| \underset{\text{Étape 2}}{\Rightarrow} |u_{n+1}| \leq q|u_n|$$

$$\underset{\text{Par hyp. de réc. H}(n)}{\Rightarrow} |u_{n+1}| \leq q \times q^n |u_0| = q^{n+1}|u_0|.$$

L'hérédité est démontrée.

Conclusion La suite $(q^n|u_0|)$ est une suite géométrique de raison $0 < q < 1$. Donc elle converge vers 0. D'après le corollaire 1 du théorème des gendarmes, on en déduit que (u_n) converge vers 0 égalememt.

Pour l'énoncé supplémentaire avec l'hypothèse f croissante, on a :

• Soit $u_0 = x \in [0, +\infty[$ et $\forall n \geq 0,\ u_n \geq 0$.

Dans ce cas

$$0 \leq u_n \leq q^n u_0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} q^n u_0$$

La suite des sommes partielles (S_n) est croissante $(S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0)$. La série géométrique est croissante et convergente donc majorée par sa limite $\frac{u_0}{1-q}$. Par conséquent (S_n) est croissante et majorée par $\frac{u_0}{1-q}$ donc convergente.

• Soit $u_0 = x \in]-\infty, 0]$ et $\forall n \geq 0,\ u_n \leq 0$.

Dans ce cas

$$u_0 q^n \leq u_n \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} q^n u_0 \leq S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq 0$$

La suite des sommes partielles (S_n) est décroissante $(S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \leq 0)$. La série géométrique est décroissante et convergente donc minorée par sa limite $\frac{u_0}{1-q}$. Par conséquent (S_n) est décroissante et minorée par $\frac{u_0}{1-q}$ donc convergente.

Chapitre 5. Exercice A.2.18 - question 3

On sait que $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge et que $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge. Montrons que $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$ diverge.

3. Reprendre à l'identique les questions 1 et 2 en remplaçant la fonction $t\mapsto \ln t$ par la fonction $t\mapsto \ln(\ln t)$.

(i) Montrer que si $1<x<y$, alors $\ln(\ln y)-\ln(\ln x)<\frac{y-x}{x\ln x}$

(ii) En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}$, avec $k\geq 2$, on a $\ln(\ln(k+1))-\ln(\ln k)<\dfrac{1}{k\ln k}$

(iii) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$ diverge vers $+\infty$.

Correction.

(i) Soit $1<x<y$. On applique l'égalité des accroissements finis à la fonction $f=\ln\circ\ln$ sur $[x,y]$. Par composition, la fonction ln est continue sur $[x\,;y]$ et dérivable sur $]x\,;y[$ donc $\exists c\in\,]x\,;y[$, $\ln(\ln y)-\ln(\ln x)=f'(c)(y-x)$.
On a $f'(c)=\dfrac{1}{c\ln c}$ et $x<c<y \quad\Rightarrow\quad x\ln x<c\ln c<y\ln y \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{y\ln y}<\dfrac{1}{c\ln c}<\dfrac{1}{x\ln x}$.
Finalement
$$\ln(\ln y)-\ln(\ln x)=f'(c)(y-x)<\frac{y-x}{x\ln x}$$

(ii) Soit $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$. On pose $x=k$ et $y=k+1$. On a bien $1<x<y$ donc on en déduit que
$$\ln(\ln(k+1))-\ln(\ln k)<\frac{1}{k\ln k}\ .$$

(iii) Par sommation entre $k=2$ et $k=n$, on obtient
$$\sum_{k=2}^{n}\ln(\ln(k+1))-\ln(\ln k)<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$$
On calcule
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}f(k+1)-f(k)&=(f(2)-f(1))+(f(3)-f(2))+\cdots+(f(n)-f(n-1))+\big(f(n+1)-f(n)\big)\\&=-f(1)+f(n+1)\\&=\ln(\ln(n+1)).\end{aligned}$$
Comme $\ln(\ln(n+1))\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, d'après les théorèmes de comparaisons à l'infini on en déduit que la série harmonique $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ln k}$ diverge vers $+\infty$.