

**Chapitre 5. Exercice A.2.24**

$$f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

1. • Tout d'abord on détermine le domaine de définition de  $f$ . Il s'agit de résoudre  $x^2 + x + 1 > 0$ . Le discriminant est  $\Delta = -3 < 0$  et  $a = 1$  donc  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ . Le domaine de définition est  $\mathbb{R}$ . La fonction  $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$  ne s'annule pas, elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Par quotient de fonctions dérivables sur leur domaine de définition, on en déduit que la fonction  $f$  est dérivable sur son domaine de définition  $\mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} - (2x + 1) \times \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{4(x^2 + x + 1) - (2x + 1)^2}{2\sqrt{x^2 + x + 1}(x^2 + x + 1)} = \frac{3}{2\sqrt{x^2 + x + 1}(x^2 + x + 1)} = \frac{3}{2(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

- Puisque  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ , on en déduit que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Calcul des limites en  $\pm\infty$  :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} \frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{x}{|x|} \frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ .

• L'image d'un intervalle ouvert par toute application continue et strictement monotone est un ouvert. D'après le tableau de variation de  $f$ , la continuité de  $f$ , on en déduit que  $\text{Im} f = ]-2; 2[$  car l'ensemble  $\mathbb{R}$  est un ouvert.

• La fonction  $f$  est continue et strictement monotone sur  $\mathbb{R}$  donc elle admet une fonction réciproque  $g$  définie et continue sur  $] - 2 ; 2[$ .

2. Puis que  $f$  est dérivable et  $f'$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  alors  $g$  est dérivable sur  $] - 2 ; 2[$ .

On a  $g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))}$ . Calculons  $g(1)$  :

$$x = g(1) \Leftrightarrow f(x) = f(g(1)) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2x + 1)^2}{x^2 + x + 1} = 1 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 1)^2 = x^2 + x + 1 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases}$$

On a  $(2x + 1)^2 - (x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = -1$ .

La condition  $2x + 1 > 0$  entraîne  $x = 0$ . Finalement

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{2}{3}.$$

### Chapitre 5. Exercice A.2.21

1. Dans cette question, on utilise  $\text{Im}(\text{Arcsin}) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $\text{Im}(\text{Arccos}) = [0, \pi]$ .

Tout d'abord, on a l'équivalence suivante

Déterminer  $y = \text{Arcsin } x$  étant donné  $x \in [-1, 1] \Leftrightarrow$  Résoudre  $x = \sin y$  avec la condition  $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Donc

$$\text{Arcsin}(\sin \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}, \quad \text{Arcsin}(\sin \frac{5\pi}{6}) = \text{Arcsin}(\sin \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}, \quad \text{Arcsin}(\sin \frac{7\pi}{6}) = \text{Arcsin}(\sin(-\frac{\pi}{6})) = -\frac{\pi}{6}.$$

Déterminer  $y = \text{Arccos } x$  étant donné  $x \in [-1, 1] \Leftrightarrow$  Résoudre  $x = \cos y$  avec la condition  $y \in [0, \pi]$

Donc

$$\text{Arccos}(\cos \frac{5\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6}, \quad \text{Arccos}(\cos \frac{7\pi}{6}) = \text{Arccos}(\cos \frac{5\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6}.$$

2. On pose  $f(x) = \text{Arcsin } x + \text{Arccos } x$ . On doit montrer que  $f$  est constante sur  $[-1, 1]$  et montrer que cette constante est  $\frac{\pi}{2}$ . Pour cela il suffit de montrer que  $f'(x) = 0$  sur  $] -1, 1[$  et calculer  $f(0)$ .

• Les fonctions Arcsin et Arccos sont dérivables sur  $] -1, 1[$  donc  $f$  aussi. On a

$$f'(x) = \text{Arcsin}' x + \text{Arccos}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left( -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = 0.$$

• Par conséquent la fonction  $f$  est constante sur  $[-1, 1]$  et  $\forall x \in [-1, 1], f(x) = f(0)$  et

$$f(0) = \text{Arcsin}(0) + \text{Arccos}(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

### Chapitre 5. Exercice A.2.6

5. • On pose  $f(x) = \text{Arcsin}(2x + 1)$ . La fonction Arcsin est dérivable sur  $] -1, 1[$  donc  $f$  est dérivable si  $2x + 1 \in ] -1, 1[ \Leftrightarrow x \in ] -1, 0[$  et on a  $f'(x) = 2 \times \frac{1}{\sqrt{1 - (2x + 1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{-4x^2 - 4x}} = \frac{1}{\sqrt{-x(x + 1)}}$ .

• On pose  $g(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$ . La fonction Arctan est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc la fonction  $g$  est définie et dérivable pour  $x \neq 1$  et on a  $g'(x) = \frac{2}{(1 - x)^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{2}{(1 - x)^2 + (x + 1)^2} = \frac{1}{1 + x^2}$ .

### Chapitre 5. Exercice A.2.23

Soit  $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ .

1. La fonction  $\text{Arctan}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  donc la fonction  $f$  est définie sur  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

2. La fonction  $f$  est composée de fonctions dérivables sur leur domaine de définition donc  $f$  l'est aussi.

On a

$$f'(x) = \left[\frac{x-1}{x+1}\right]' \times \text{Arctan}'\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} = \frac{2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} = \frac{2}{2x^2 + 2} = \frac{1}{1+x^2}$$

On remarque que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $f'(x) = \text{Arctan}'x$ .

On en déduit qu'il existe deux constantes  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in ]-\infty, -1[, f(x) = \text{Arctan } x + C_1$$

et

$$\forall x \in ]-1, +\infty[, f(x) = \text{Arctan } x + C_2.$$

On peut déterminer ces constantes en déterminant les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . En effet, par passage à la limite on doit avoir

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + C_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + C_2.$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \quad \text{et} \quad \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$$

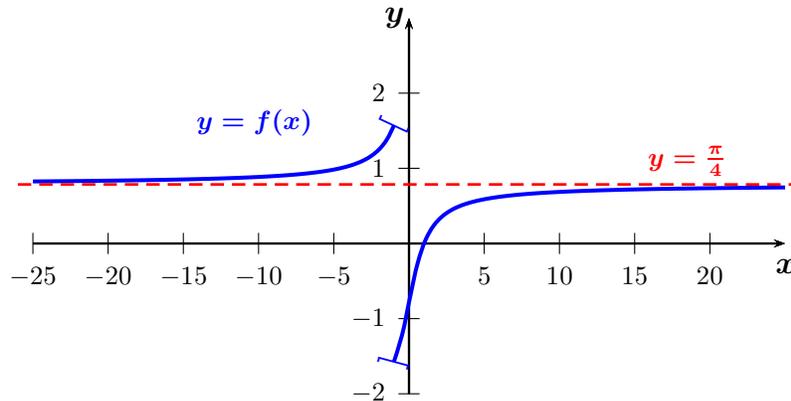
On en déduit que  $C_1 = \frac{3\pi}{4}$  et  $C_2 = -\frac{\pi}{4}$ .

$$\boxed{\forall x \in ]-\infty, -1[, f(x) = \text{Arctan } x + \frac{3\pi}{4}}$$

et

$$\boxed{\forall x \in ]-1, +\infty[, f(x) = \text{Arctan } x - \frac{\pi}{4}}$$

3. On trace les deux morceaux de courbes associées aux expressions ci-dessus en s'inspirant de la courbe représentative de  $\text{Arctan}$ .



4. D'après la question 2., on a  $f(]-\infty, -1]) = ]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$  et  $f(]-1, +\infty[) = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$ .

Donc,  $\boxed{\text{Im } f = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[ \cup ]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[}$ .

5. Dans cette question, il faut faire attention au fait que le domaine de définition  $D$  de  $f$  n'est pas un intervalle.

- $\forall x \in D, f'(x) > 0$ . On en déduit que  $f$  est bijective de  $]-\infty, -1[$  sur  $f(]-\infty, -1]) = ]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$  et  $f$  est bijective de  $]-1, +\infty[$  sur  $f(]-1, +\infty[) = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$ .
- Pour conclure que  $f$  est bijective sur  $D$ , il faut préciser que

$$f(]-\infty, -1]) \cap f(]-1, +\infty[) = \emptyset.$$

Ainsi, chaque image  $y \in \text{Im } f$  admet un unique antécédent soit dans l'intervalle  $]-\infty, -1[$ , soit dans l'intervalle  $]-1, +\infty[$ .

6. On cherche l'expression algébrique de  $g$ . Soit  $y \in \text{Im } f$ , on a

$$x = g(y) \Leftrightarrow f(x) = f \circ g(y) \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Puis, on résout cette dernière équation d'inconnue  $x$ .

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = y \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \tan y \Leftrightarrow x-1 = (x+1)(\tan y) \Leftrightarrow x(1-\tan y) = 1+\tan y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1+\tan y}{1-\tan y}. \end{aligned}$$

D'où,  $\boxed{g(y) = \frac{1+\tan y}{1-\tan y}}$ . Pour obtenir la courbe représentative de  $g$ , il faut tracer le symétrique de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $y = x$ .

7. On a

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{[1+\tan y]'(1-\tan y) - (1+\tan y)[1-\tan y]'}{(1-\tan y)^2} \\ &= \frac{(1+\tan^2 y)(1-\tan y) - (1+\tan y)(-1-\tan^2 y)}{(1-\tan y)^2} \\ &= \frac{(1+\tan^2 y - \tan y - \tan^3 y) - (-1 - \tan^2 y - \tan y - \tan^3 y)}{(1-\tan y)^2} \\ &= \frac{2+2\tan^2 y}{(1-\tan y)^2} \end{aligned}$$

On doit avoir  $f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$ . On calcule le dénominateur

$$\begin{aligned} g'(f(x)) &= \frac{2+2\tan^2(f(x))}{(1-\tan(f(x)))^2} = \frac{2+2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)^2} = \frac{2+2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}{\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \times \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2(x+1)^2+2(x-1)^2}{((x+1)-(x-1))^2} \\ &= \frac{2(x^2+2x+1)+2(x^2-2x+1)}{(2)^2} = x^2+1 \end{aligned}$$

On retrouve bien  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .