Chapitre 6. Exercice A.2.4

1. On rappelle que la fonction cos est de classe C^∞. On peut utiliser T-Y en tout point et à tout ordre. Utilisons le développement usuel de cos en 0.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

Ensuite, grâce aux opérations sur les DLs, on trouve

$$1 - \cos x = 1 - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}) + o(x^4) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$(1 - \cos x)^2 = (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!})^2 + o(x^4) = \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!})^2 + o(x^4)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

On peut retrouver le développement de T-Y de $(1 - \cos x)^2$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(1 - \cos x)^2 = 1 - 2\cos x + \cos^2 x &= 1 - 2(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}) + (1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4) + o(x^4)\\ &= \frac{x^4}{4} + o(x^4).\end{aligned}$$

2. a) On applique la formule de T-Y en $a = \frac{\pi}{4}$ à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}\cos(\tfrac{\pi}{4} + h) =& \cos(\tfrac{\pi}{4}) - \sin(\tfrac{\pi}{4})h - \cos(\tfrac{\pi}{4})\frac{h^2}{2} + \sin(\tfrac{\pi}{4})\frac{h^3}{3!} + \cos(\tfrac{\pi}{4})\frac{h^4}{4!} + h^4\varepsilon(h)\\ =& \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right) + h^4\varepsilon(h), \quad \text{avec } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0.\end{aligned}$$

b) Il faut utiliser la trigonométrie pour développer $\cos(\frac{\pi}{4} + h)$ ainsi que les développements usuels de $\cos h$ et $\sin h$ en 0.

$$\begin{aligned}\cos(\tfrac{\pi}{4} + h) =& \cos(\tfrac{\pi}{4})\cos(h) - \sin(\tfrac{\pi}{4})\sin(h)\\ =& \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4!}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h - \frac{h^3}{3!}\right) + h^4\varepsilon(h)\\ =& \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right) + h^4\varepsilon(h), \quad \text{avec } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0.\end{aligned}$$

On retrouve le même développement de T-Y.

Exercice A.2.10 - question 2

1. On écrit $\ln(1+\sin x) = g \circ f(x)$ avec $f(x) = \sin x$ et $g(y) = \ln(1+y)$

(i) DL de f en $a = 0$ à l'ordre 3 : $f(x) = sinx = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

(ii) DL de g en $b = f(0) = 0$ à l'ordre 3 : $g(0+k) = \ln(1+k) = k - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} + k^3\varepsilon(k)$

(iii) On compose les DLs en posant $k = x - \frac{x^3}{6}$:

$$\begin{aligned} \ln(1+\sin x) &= (x - \tfrac{x^3}{6}) - \frac{(x - \frac{x^3}{6})^2}{2} + \frac{(x - \frac{x^3}{6})^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}.$$

3. On écrit $\sqrt{\cos x} = g \circ f(x)$ avec $f(x) = \cos x$ et $g(y) = \sqrt{y}$.

(i) DL de f en $a = 0$ à l'ordre 4 : $f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.

(ii) DL de g en $b = f(0) = 1$ à l'ordre 2 suffit : $g(1+k) = \sqrt{1+k} = 1 + \frac{k}{2} - \frac{k^2}{8} + k^2\varepsilon(k)$

(iii) On compose les DLs en posant $k = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos x} &= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^4}{32} + x^4\varepsilon(x) \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + x^4\varepsilon(x) \end{aligned}.$$

4. On écrit $\sqrt{1+\cos x} = g \circ f(x)$ avec $f(x) = 1 + \cos x$ et $g(y) = \sqrt{y}$.

(i) DL de f en $a = 0$ à l'ordre 2 : $f(x) = 1 + \cos x = 2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

(ii) DL de g en $b = f(0) = 2$ à l'ordre 2 : $g(2+k) = \sqrt{2+k} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{k}{2}} = \sqrt{2}(1 + \frac{k}{4} - \frac{k^2}{32}) + k^2\varepsilon(k)$

(iii) On compose les DLs en posant $k = -\frac{x^2}{2}$:

$$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} + x^2\varepsilon(x) \quad .$$

5. On écrit $\sqrt{1+\cos x} = g \circ f(x)$ avec $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $g(y) = e^y$.

(i) DL de f en $a = 0$ à l'ordre 2 : $f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$.

(ii) DL de g en $b = f(0) = 1$ à l'ordre 2 : $g(1+k) = e^{1+k} = e \times e^k = e(1 + k + \frac{k^2}{2}) + k^2\varepsilon(k)$

(iii) On compose les DLs en posant $k = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$:

$$e^{\sqrt{1+x}} = e\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8}\right) + x^2\varepsilon(x) \quad .$$

D'où $e^{\sqrt{1+x}} = e(1 + \frac{x}{2}) + x^2\varepsilon(x)$.

Exercice A.2.21

Les quotients sont de la forme (0/0) au voisinage de $a = 0$. On remplace numérateur et dénominateur par leur partie principale dans le calcul de la limite.

NB : Les DL de T-Y de *tan* et $\sin^2$ ont été vu au A.2.19.

1. $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\tan x = x + o(x) \Rightarrow \tan^2 x = x^2 + o(x^2)$.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

2. $(1 - \cos x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\operatorname{Arctan} x = x + o(x)$ et $x \sin^2 x = x^3 + o(x^3)$.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\operatorname{Arctan} x}{x \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

3. $\sin x - x\cos x = [x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)] - x[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)] = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, et $x(1-\cos x) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

4. $\sin x + 2\sqrt{1+x} = [x - \frac{x^3}{6}] + 2 - 2[1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}] + o(x^3) = \frac{x^2}{4} + o(x^4)$ et $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + 2\sqrt{1+x}}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{4}}{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice A.2.17 Application des DLs à l'étude locale de courbes

1. $e^{\sin x} = g \circ f(x)$ avec $f(x) = \sin x$ et $g(y) = e^y$.

- DL de f en 0 à l'ordre 4 :
$$f(x) = [x - \tfrac{x^3}{6}] + o(x^4).$$
- On calcule $b = f(0) = 0$. DL de g en $b = 0$ à l'ordre 4 : on pose $y = 0 + k$
$$\mathrm{g}(k) = 1 + k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k^3 + \frac{1}{24}k^4 + o(k^4).$$
- DL de $g \circ f$ en 0 à l'ordre 4 : on pose $k = P_4(x) - b = x - \frac{x^3}{6}$
$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= 1 + (x - \tfrac{x^3}{6}) + \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{x^3}{6})^2 + \tfrac{1}{6}(x - \tfrac{x^3}{6})^3 + \tfrac{1}{24}(x - \tfrac{x^3}{6})^4 + o(x^4) \\ &= 1 + x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{1}{2}(x^2 - \tfrac{x^4}{3}) + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^4}{24} + o(x^4) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{8}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

L'équation de la tangente est $y = 1 + x$.
L'écart entre $\mathscr{C}_f$ et la tangente est $d(x) = \frac{x^2}{2}x^2 + o(x^2)$. On peut donc dire que la tangente est située sous la courbe représentative de $g \circ f$ au voisinage de $a = 0$.

2. $\arctan(\sqrt{3}(\cos x + \sin x)) = g \circ f(x)$ avec $f(x) = \cos x + \sin x$ et $g(y) = \arctan(\sqrt{3}y)$.

- DL de f en 0 à l'ordre 2 :
$$f(x) = [1 - \tfrac{x^2}{2}] + x + o(x^2) = \underbrace{1 + x - \tfrac{x^2}{2}}_{P_2(x)} + o(x^2).$$
- On calcule $b = f(0) = 1$. DL de g en $b = 1$ à l'ordre 2 : on pose $y = 1 + k$
$$\begin{aligned} \mathrm{g}(1 + k) =& g(1) + g'(1)k + \frac{g''(1)}{2}k^2 + o(k^2) \\ =& \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{4}k - \tfrac{3\sqrt{3}}{16}k^2 + o(k^2) \end{aligned}$$
avec $g(1) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, $g'(y) = \frac{\sqrt{3}}{1+3y^2}$ et $g''(y) = -\frac{6\sqrt{3}y}{(1+3y^2)^2}$.
- DL de $g \circ f$ en 0 à l'ordre 2 : on pose $k = P_2(x) - b = x - \frac{x^2}{2}$
$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{4}(x - \tfrac{x^2}{2}) - \tfrac{3\sqrt{3}}{16}(x - \tfrac{x^2}{2})^2 + o(x^2) \\ &= \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{4}x - \tfrac{\sqrt{3}}{8}x^2 - \tfrac{3\sqrt{3}}{16}x^2 + o(x^2) \\ &= \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{4}x - \tfrac{5\sqrt{3}}{16}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

L'équation de la tangente est $y = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}x$.
L'écart entre $\mathscr{C}_f$ et la tangente est $d(x) = -\frac{5\sqrt{3}}{16}x^2 + o(x^2)$. On peut donc dire que la tangente est située au-dessous de la courbe représentative de $g \circ f$ au voisinage de $a = 0$.

3. $\arctan(\frac{1-x}{1+x}) = g \circ f(x)$ avec $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ et $g(y) = \arctan(y)$.

- DL de f en 0 à l'ordre 3 :
$$\begin{aligned} f(x) = -1 + \frac{2}{1+x} =& -1 + 2(1 - x + x^2 - x^3) + o(x^3) \\ =& \underbrace{1 - 2x + 2x^2 - 2x^3}_{=P_3(x)} + o(x^3). \end{aligned}$$

- On calcule $b = f(0) = 1$. DL de g en $b = 1$ à l'ordre 3 : on pose $y = 1 + k$

$$g(1+k) = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2} - \frac{k^2}{4} + \frac{k^3}{12} + o(k^2)$$

avec $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$, $\arctan''(y) = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$ et $\arctan^{(3)}(y) = -\frac{2}{(1+y^2)^2} + \frac{8y^2}{(1+y^2)^3}$

- DL de $g \circ f$ en 0 à l'ordre 3 : on pose $k = P_3(x) - b = -2x + 2x^2 - 2x^3$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= \frac{\pi}{4} + \frac{(-2x+2x^2-2x^3)}{2} - \frac{(-2x+2x^2-2x^3)^2}{4} + \frac{(-2x+2x^2-2x^3)^3}{12} + o(x^3) \\ &= \frac{\pi}{4} + [-x + x^2 - x^3] - [x^2 - 2x^3] - \frac{2x^3}{3} + o(x^3) \\ &= \frac{\pi}{4} - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

L'équation de la tangente est $y = \frac{\pi}{4} - x$.
L'écart entre $\mathscr{C}_f$ et la tangente est $d(x) = +\frac{x^3}{3} + o(x^3)$. On peut donc dire que la tangente traverse la courbe représentative de f en $a = 0$. Plus précisément, la courbe $\mathscr{C}_{g\circ f}$ est située au dessus de la tangente à gauche de $a = 0$ et située sous la tangente à droite de $a = 0$.

Chapitre 6. Exercice A.2.25 Étude des branches infinies

1. $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}}$

On effectue le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ dans la fonction $\dfrac{f(x)}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x(e^{\frac{1}{x}} - 1)} = \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} - 1} \quad \Rightarrow \quad \text{On pose } g(X) = \frac{X}{e^X - 1}.$$

Ensuite, sachant que $X \underset{x \to \pm\infty}{\to} 0$, on effectue un DL au voisinage de 0 de g à un ordre suffisant permettant d'en déduire l'équation de l'asymptote et sa position par rapport à la courbe. On a

$$e^X - 1 = X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 + X^3\varepsilon(X) \quad \text{avec } \varepsilon_0(X) \underset{X \to 0}{\to} 0$$

$$g(X) = \frac{X}{X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 + X^3\varepsilon_0(X)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{6}X^2 + X^2\varepsilon_0(X)}$$

On effectue une division selon les puissantes croissantes :

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & & & & 1 + \dfrac{X}{2} + \dfrac{X^2}{6} \\ \cline{5-5}
 & -\dfrac{X}{2} & -\dfrac{X^2}{6} & & 1 - \dfrac{X}{2} + \dfrac{X^2}{12} \\
 & & +\dfrac{X^2}{12} & \ldots &
\end{array}$$

Le $DL_2(0)$ de g est

$$g(X) = 1 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{12} + X^2\varepsilon_1(X) \quad \text{avec } \varepsilon_1(X) \underset{X \to 0}{\to} 0$$

On revient à la variable x et à la fonction f :

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_1(\frac{1}{x}) \quad \Rightarrow \quad f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{12x} + \frac{1}{x}\varepsilon_1(\frac{1}{x})$$

2. L'équation de l'asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$ est $y = x - \frac{1}{2}$.
Lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, le reste $\frac{1}{x}\varepsilon_1\left(\frac{1}{x}\right)$ est négligeable par rapport au terme $\frac{1}{12x}$ et n'influe pas sur le signe.

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) - y = \frac{1}{12x} + \frac{1}{x}\varepsilon_1\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \Rightarrow \text{La courbe } \mathscr{C}_f \text{ est située en dessous de l'asymptote}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow f(x) - y = \frac{1}{12x} + \frac{1}{x}\varepsilon_1\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Rightarrow \text{La courbe } \mathscr{C}_f \text{ est située au-dessus de l'asymptote.}$$

3. $\boxed{f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}}$

On effectue le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ dans la fonction $\dfrac{f(x)}{x} = g(X)$:

$$g(X) = \frac{f(x)}{x} = x \sin \tfrac{1}{x} = \frac{\sin X}{X}.$$

Ensuite, sachant que $X \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$, on effectue un DL au voisinage de 0 de g à un ordre suffisant permettant d'en déduire l'équation de l'asymptote et sa position par rapport à la courbe. On a

$$g(X) = 1 - \frac{X^2}{6} + X^2\varepsilon(X).$$

On revient à la variable x et à la fonction f :

$$f(x) = x \times \frac{f(x)}{x} = x \times \left(1 - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\tfrac{1}{x})\right) = x - \frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\tfrac{1}{x}).$$

L'équation de l'asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$ est $y = x$.
Lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, le reste $\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ est négligeable par rapport au terme $-\frac{1}{6x}$ et n'influe pas sur le signe.

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) - y = -\frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Rightarrow \text{La courbe } \mathscr{C}_f \text{ est située au-dessus de l'asymptote}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow f(x) - y = -\frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \Rightarrow \text{La courbe } \mathscr{C}_f \text{ est située en-dessous de l'asymptote.}$$

$\boxed{f(x) = x\cos\frac{1}{x}}$

On effectue le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ dans la fonction $\dfrac{f(x)}{x} = g(X)$:

$$g(X) = \frac{f(x)}{x} = \cos\tfrac{1}{x} = \cos X.$$

Ensuite, sachant que $X \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$, on effectue un DL au voisinage de 0 de g à un ordre suffisant permettant d'en déduire l'équation de l'asymptote et sa position par rapport à la courbe. On a

$$g(X) = 1 - \frac{X^2}{2} + X^2\varepsilon(X).$$

On revient à la variable x et à la fonction f :

$$f(x) = x \times \frac{f(x)}{x} = x \times \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\tfrac{1}{x})\right) = x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\tfrac{1}{x}).$$

L'équation de l'asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$ est $y = x$.
Lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, le reste $\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ est négligeable par rapport au terme $-\frac{1}{2x}$ et n'influe pas sur le signe.

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) - y = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Rightarrow \text{La courbe } \mathscr{C}_f \text{ est située au-dessus de l'asymptote}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow f(x) - y = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \Rightarrow \text{La courbe } \mathscr{C}_f \text{ est située en-dessous de l'asymptote.}$$

Exercice hors poly. Application à l'étude des branches infinies
On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2+1)\arctan x} \ .$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, on a $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = signe(x) \times \frac{\pi}{2}$.
2. En déduire que pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})(signe(x)\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x})}$$

3. On pose $g(\frac{1}{x}) = \frac{f(x)}{x}$ puis $t = \frac{1}{x}$.
Déterminer le DL de $g(t)$ à l'ordre de 2 au voisinage de 0^+ et 0^-.
4. En déduire les équations des asymptotes et leur position par rapport à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$.

Correction. 1. On pose $h(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On a

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = 0 \ , \forall x \in \mathbb{R}^* \ .$$

On en déduit que la fonction h est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Les constantes peuvent être différentes sur chaque intervalle. On utilise

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan x \ + \lim_{x\to+\infty} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \ ,$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \arctan x \ + \lim_{x\to-\infty} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2} \ ,$$

pour conclure que $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = signe(x) \times \frac{\pi}{2}$.
2. On vérifie que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Puis on calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)\arctan x} = \frac{2}{\pi} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)\arctan x} = -\frac{2}{\pi}.$$

Dans ce cas on sait que $\mathscr{C}_f$ droite asymptote en $+\infty$ et $-\infty$. On doit effectuer le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$ et calculer $g(X) = \dfrac{f(x)}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{(x^2+1)\arctan x} = \frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})\arctan x} = \frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})(signe(x)\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x})}$$

3. On pose alors $g(X) = \frac{1}{(1+X^2)(signe(X)\frac{\pi}{2} - \arctan X)}$. (On a utilisé $signe(x) = signe(\frac{1}{x})$). On effectue un DL à l'ordre 2 de g en 0 (pour avoir assez de termes pour en déduire l'équation de l'asymptote et sa position par rapport à la courbe).

$$\arctan X \underset{X\sim 0}{=} X + X^2\varepsilon(X)$$

$$\begin{aligned}(1+X^2)(signe(X)\frac{\pi}{2} - \arctan X) &\underset{X\sim 0}{=} (1+X^2)(signe(X)\frac{\pi}{2} - X + X^2\varepsilon(X)) \\ &\underset{X\sim 0}{=} signe(X)\frac{\pi}{2} - X + signe(X)\frac{\pi}{2}X^2 + X^2\varepsilon(X) \ .\end{aligned}$$

On effectue une division selon les puissances croissantes pour trouver

$$g(X) \underset{X \sim 0}{=} signe(X)\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}X + signe(X)(\frac{8}{\pi^3} - \frac{2}{\pi})X^2 + X^2\varepsilon(X)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} \underset{x \sim +\infty}{=} \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{x} + (\frac{8}{\pi^3} - \frac{2}{\pi})\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow f(x) \underset{x \sim +\infty}{=} \frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2} + (\frac{8}{\pi^3} - \frac{2}{\pi})\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

On en déduit l'équation de la droite asymptote en $+\infty$: $y = \frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}$ et la position de la courbe par rapport à l'asymptote grâce au signe de $f(x) - y < 0$ au voisinage de $+\infty$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est en effet située sous l'asymptote en $+\infty$.

De même

$$\Rightarrow f(x) \underset{x \sim -\infty}{=} -\frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2} - (\frac{8}{\pi^3} - \frac{2}{\pi})\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

On en déduit l'équation de la droite asymptote en $-\infty$: $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}$ et la position de la courbe par rapport à l'asymptote grâce au signe de $f(x) - y < 0$ au voisinage de $-\infty$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est en effet située sous l'asymptote en $-\infty$.

Exercice hors poly. Recherche d'extrema locaux

On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = x\text{Arctan}\, x - \ln(1+x^2) \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} f_2(x) = \frac{\text{Arctan}\, x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ f_2(0) = 1. \end{cases}$$

1. Justifier que f_1 et f_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. A l'aide d'un développement limité à un ordre suffisant, montrer que $a = 0$ réalise un extremum local de f_1 et f_2 dont on précisera la nature.
3. Justifier que f_1 est convexe.
4. En déduire que les extrema locaux sont des extrema globaux.

Correction.

1. • Par produit, somme et composition de fonctions continûment dérivables sur leur domaine de définition, f_1 l'est aussi sur $D_{f_1} = \mathbb{R}$. On a
$$f_1'(x) = \text{Arctan}\, x - \frac{x}{1+x^2}.$$
• De même, l'expression $x \mapsto \frac{\text{Arctan}\, x}{x}$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Il reste à étudier la dérivabilité de f_2 en $a = 0$ et la continuité de f_2' en $a = 0$.
$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x} = \frac{\frac{\text{Arctan}\, x}{x} - 1}{x} = \frac{\text{Arctan}\, x - x}{x^2} = \frac{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x}{x^2} = -\frac{x}{3} + o(x) \underset{t\to 0}{\to} 0$$
La fonction f_2 est dérivable en $a = 0$ et $f_2'(0) = 0$. De plus
$$f_2'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}\, x}{x^2}.$$
On a alors au voisinage de $a = 0$, $f_2'(x) = \frac{x(1-x^2)-(x-\frac{x^3}{3})+o(x^3)}{x^2} = -\frac{2x}{3} + o(x) \underset{t\to 0}{\to} 0 = f_2'(0)$.
La fonction f_2' est continue en $a = 0$.
2. Tout d'abord on remarque que $a = 0$ peut être un éventuel extremum local de f_1 et f_2 car $f_1'(0) = f_2'(0) = 0$.
$$f_1(x) = x(x - \frac{x^3}{3}) - (x^2 - \frac{x^4}{2}) + o(x^4) = \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$
$f_1(0) = 0$ est un minimum local de f_1.
$$f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{3} = o(x^2).$$
Le nombre $f_2(0) = 1$ est maximum local de f_2.
3. On calcule $f_1''(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$. La fonction f_1 est convexe.
4. On en déduit que $f_1(0) = 0$ est le minimum global de f_1.
Ensuite, sachant que $f_2'(x) = -\frac{f_1'(x)}{x^2}$, on utilise les variations de f_1' pour dresser le tableau de variation de f_2 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0