Exercice hors poly. Extrema locaux

On admet que la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. À l'aide d'un développement limité à un ordre suffisant, montrer que $a = 0$ réalise un extremum local de f dont on précisera la nature (minimum ou maximum local).
2. (a) À l'aide du théorème de Rolle, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in]n\pi, (n+1)\pi[$ tel que $f'(c_n) = 0$.

   (b) Montrer que le développement limité de f en c_n à l'ordre 2 est

   $$\forall\, h \in \mathbb{R},\ f(c_n + h) = f(c_n) - \frac{f(c_n)}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h), \quad \text{avec } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0.$$

   (Indication : calculer $f''(x)$ et justifier que $f''(c_n) = -f(c_n)$.)

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel c_n réalise également un extremum local de f dont on précisera la nature (minimum ou maximum local).

Correction.

1. Au voisinage de $a = 0$, on a

   $$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

   Par unicité du développement limité, on lit que $f'(0) = 0$ et que $a = 0$ réalise un maximum local de f sur $\mathbb{R}$. En effet, au voisinage de $a = 0$, on a

   $$f(x) - f(0) = f(x) - 1 = -\frac{x^2}{6} + o(x^2) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(0) = 1.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f(n\pi) = f((n+1)\pi) = 0$. D'après le théorème de Rolle, $\exists\, c_n \in]n\pi, (n+1)\pi[,\ f'(c_n) = 0$.

   (b) La formule de Taylor-Young fourni au voisinage de c_n le développement limité suivant :

   $$f(c_n + h) = f(c_n) + f'(c_n)h + \frac{f''(c_n)}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h), \quad \text{avec } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0.$$

   On sait déjà que $f'(c_n) = 0$. Calculons $f''(c_n)$:

   $$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

   $$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2(\cos x - x\sin x - \cos x) - 2x(x\cos x - \sin x)}{x^4} \\ \Rightarrow \qquad &= \frac{-x^3\sin x - 2(x\cos x - \sin x)}{x^3} \\ &= -\,f(x) - \frac{2f'(x)}{x} \end{aligned}$$

   On en déduit que $f''(c_n) = -f(c_n)$ et on a bien

   $$f(c_n + h) = f(c_n) - \frac{f(c_n)}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h), \quad \text{avec } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0.$$

(c) • Si n est pair alors la fonction sin est strictement positive sur $]n\pi, (n+1)\pi[$ et $f(c_n) = \frac{\sin c_n}{c_n} > 0$. Alors,

$$f(x) - f(c_n) = -\frac{f(c_n)}{2}(x-c_n)^2 + (x-c_n)^2\varepsilon(x-c_n) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(c_n)$$

Il s'agit d'un maximum local.

• Si n est impair alors la fonction sin est strictement négative sur $]n\pi, (n+1)\pi[$ et $f(c_n) = \frac{\sin c_n}{c_n} < 0$. Alors,

$$f(x) - f(c_n) = -\frac{f(c_n)}{2}(x-c_n)^2 + (x-c_n)^2\varepsilon(x-c_n) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(c_n)$$

Il s'agit d'un minimum local.

Exercice A.2.26 Étude des branches infinies de $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$

On détermine entièrement l'équation de l'asymptote ainsi que la position de la courbe représentative de f par rapport à l'asymptote en passant par le développement asymptotique de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $\pm\infty$:

- Changement de variable $t = \frac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+2}{x}e^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{2}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = (1+2t)e^t$$

- On pose $g(t) = (1+2t)e^t$ et on détermine les trois 1ers termes du D.L. de g en 0 :
  $(1+2h)$ est un polynôme donc son D.L. est lui-même avec reste nul.

$$e^h = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_1(h)$$

  On multiplie les parties régulières et on garde les termes de degré inférieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} g(t) &= (1+2t)(1+t+\frac{t^2}{2}) + t^2\varepsilon_2(t) \\ &= 1 + 2t + t + 2t^2 + \frac{t^2}{2} + t^3 + t^2\varepsilon_2(t) \\ &= 1 + 3t + \frac{5t^2}{2} + t^2\varepsilon_3(t) \end{aligned}$$

- On revient à la fonction f et à la variable x en utilisant $t = \frac{1}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x} = g(\tfrac{1}{x}) = 1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad f(x) = x + 3 + \frac{5}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right)$$

- **Conclusion** : L'équation de l'asymptote en $+\infty$ et $-\infty$ est $y = x+3$.
  Pour connaître la position de l'asymptote par rapport à la courbe, il faut étudier le signe de la différence $f(x) - y$ en fonction de $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$:

$$f(x) - y = \frac{5}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right)$$

  Lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, le reste $\frac{1}{x}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right)$ est négligeable par rapport au terme $\frac{5}{2x}$

  $x \to -\infty \Rightarrow f(x) - y < 0 \Rightarrow$ La courbe représentative de f est située en dessous de l'asymptote

  $x \to +\infty \Rightarrow f(x) - y > 0 \Rightarrow$ La courbe représentative de f est située au-dessus de l'asymptote