Chapitre 6. Exercice A.2.6

Dans toute la suite ε est une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 telle que $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$. Elle varie d'une fonction à une autre.

2. Développements de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de $x = a$:

(i) $\forall\, h \in \mathbb{R},\ e^{a+h} = e^a \times e^h = e^a \left(1 + h + \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{6}\right) + h^3\varepsilon(h)$

(ii) $\cos(a+h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h = \cos(a)\big(1 - \frac{h^2}{2}\big) - \sin(a)\big(h - \frac{h^3}{6}\big) + h^3\varepsilon(h)$

$$\Rightarrow \quad \forall\, h \in \mathbb{R},\ \cos(a+h) = \cos a - h\sin a - \frac{\cos(a)}{2}h^2 + \frac{\sin(a)}{6}h^3 + h^3\varepsilon(h).$$

(iii) $\cos(a+h) = \cos a \sin h + \sin a \cos h = \cos(a)\big(h - \frac{h^3}{6}\big) + \sin(a)\big(1 - \frac{h^2}{2}\big) + h^3\varepsilon(h)$

$$\Rightarrow \quad \forall\, h \in \mathbb{R},\ \sin(a+h) = \sin(a) + h\cos(a) - \frac{\sin(a)}{2}h^2 - \frac{\cos(a)}{6}h^3 + h^3\varepsilon(h).$$

(iv) $\dfrac{1}{a+h} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{1+\frac{h}{a}}$. On pose $t = \frac{h}{a} \underset{h\to 0}{\to} 0$ dans le DL usuel $\quad \dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^3\varepsilon(t)$.

$$a < 0 \Rightarrow \quad \forall\, h \in\,]-\infty, -a[\,,\ \frac{1}{a+h} = \frac{1}{a} - \frac{h}{a^2} + \frac{h^2}{a^3} + \frac{h^3}{a^4} + h^3\varepsilon(h).$$

ou

$$a > 0 \Rightarrow \quad \forall\, h \in\,]-a, +\infty[\,,\ \frac{1}{a+h} = \frac{1}{a} - \frac{h}{a^2} + \frac{h^2}{a^3} + \frac{h^3}{a^4} + h^3\varepsilon(h).$$

(v) $\ln(a+h) = \ln\big(a \times (1 + \frac{h}{a})\big) = \ln a + \ln\big(1 + \frac{h}{a}\big)$.

On pose $t = \frac{h}{a} \underset{h\to 0}{\to} 0$ dans le DL usuel $\quad \ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t)$.

$$\Rightarrow \quad \forall\, h \in\,]-a, +\infty[\,,\ \ln(a+h) = \ln(a) + \frac{h}{a} - \frac{h^2}{2a^2} + \frac{h^3}{3a^3} + h^3\varepsilon(h).$$

(vi) $\sqrt{a+h} = \sqrt{a} \times \sqrt{1 + \frac{a}{h}}$.

On pose $t = \frac{h}{a} \underset{h\to 0}{\to} 0$ dans le DL usuel $\quad \sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2}{8} + \dfrac{t^3}{16} + t^3\varepsilon(t)$.

$$\Rightarrow \quad \forall\, h \in\ [-a, +\infty[\,,\ \sqrt{a+h} = \sqrt{a} + \frac{h}{2\sqrt{a}} - \frac{h^2}{8a\sqrt{a}} + \frac{h^3}{16a^2\sqrt{a}} + h^3\varepsilon(h)$$

Exercice A.2.22

1. Il faut au moins un DL à l'ordre 3 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^3).$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^3).$$

$$f(x) = \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}) + (1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}) - 2 - x^2 + o(x^3)}{x^3} = \frac{x}{12} + o(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

2. Il faut au moins un DL à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \tfrac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2 + \frac{1}{16}(2x)^3 + o(x^3)\\ &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - (1 + x - \frac{x^2}{2}) + o(x^2)}{x^2} = 1 + o(1)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to 0}{\to} 1.$$

3. Il faut au moins un DL à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned}e^{-x}\sin x &= (1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24})(x - \frac{x^3}{6}) + o(x^4)\\ &= x - x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)\\ &= x - x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{3x} + o(1)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to 0}{\to} \infty.$$

4. On cherche la partie principale du numérateur :

$$\sin x - \ln(1+x) = (x - \frac{x^3}{6}) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

On cherche la partie principale du dénominateur :

$$(e^x - 1)\sin x = x^2 + o(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{2}.$$

5. On effectue un changement de variable : $t = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

$$x\left((1 + \frac{1}{x})^x - e\right) = \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}} - e}{t}.$$

On cherche la partie principale du numérateur au voisinage de $t = 0$:

$$(1+t)^{\frac{1}{t}} - e = e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} - e = g \circ f(t)$$

avec $f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$ et $g(y) = e^y - e$.

(i) DL de f en 0 :

$$f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 - \frac{t}{2} + o(t).$$

(ii) DL de g en $b = f(0) = 1$: on pose $b = 1 + k$

$$e^y = e^{1+k} = e(1+k) + o(k) \quad \Rightarrow \quad g(y) = g(1+k) = e^{1+k} - e = ek + o(k)$$

(iii) On compose les DLs en posant $k = -\frac{t}{2}$:

$$g \circ f(t) = -\frac{et}{2} + o(t)$$

On en déduit

$$\lim_{x \to +\infty} x(1+x)^{\frac{1}{x}} - e = \lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}} - e}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-\frac{et}{2}}{t} = -\frac{e}{2}.$$

6. Utiliser

$$f(x) = \frac{1 + \tan^2 x - 2\tan x}{1 + \cos 4x}$$

On commence par déterminer la partie principale du dénominateur plus simple :

$$1 + \cos 4x = 1 + \cos(\pi + 4h) = 1 - \cos(4h) = 8h^2 + o(h^2).$$

Pour le numérateur on applique T-Y à l'ordre 2 : soit $u(x) = 1 + \tan^2 x - 2\tan x$, alors

$$u'(x) = 2(1 + \tan^2 x)\tan x - 2(1 + \tan^2 x),$$

$$u''(x) = 2(1 + \tan^2 x)(2\tan^2 x - 2\tan x) + 2(1 + \tan^2 x)^2,$$

$$\tan(\tfrac{\pi}{4}) = 1.$$

$$u(\tfrac{\pi}{4} + h) = u(\frac{\pi}{4}) + u'(\frac{\pi}{4})h + \frac{u''(\frac{\pi}{4})}{2}h^2 + o(h^2) = 4h^2$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{h \to 0} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{4h^2}{8h^2} = \frac{1}{2}.$$

Chapitre 6. Exercice A.2.5

• **1ère fonction :** On écrit
$$e^x\sqrt{1+x^2} = e^x \times (1+x^2)^{\frac{1}{2}}.$$
On utilise le développement usuel au voisinage de 0 des fonction $f(x) = e^x$ et $g(x) = (1+X)^\alpha$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$. On a
$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x), \quad \varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$
$$g(X) = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{X^2}{8} + X^2\varepsilon_2(X), \quad \varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$
Ensuite, on pose $X = x^2$. Ainsi
$$h(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x), \quad \varepsilon_3(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$
Par conséquent
$$\begin{aligned} f(x)h(x) &= (1 + x + \frac{x^2}{2}) \times (1 + \frac{x^2}{2}) + x^2\varepsilon_4(x), \quad \varepsilon_4(x) \underset{x\to 0}{\to} 0 \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_5(x), \quad \varepsilon_5(x) \underset{x\to 0}{\to} 0 \\ &= 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon_5(x). \end{aligned}$$

• **2ème fonction :** On écrit
$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \ln(1+x) \times (1+x)^{-1}.$$
On peut utiliser les développements usuels au voisinage de 0 des fonctions $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = (1+x)^\alpha$ pour $\alpha = -1$. On a
$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x), \quad \varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\to} 0,$$
$$g(x) = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon_2(x), \quad \varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$
Par conséquent
$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (x - \frac{x^2}{2}) \times (1 - x + x^2) + x^2\varepsilon_3(x), \quad \varepsilon_3(x) \underset{x\to 0}{\to} 0 \\ &= x - x^2 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x), \quad \varepsilon_4(x) \underset{x\to 0}{\to} 0 \\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon_4(x). \end{aligned}$$

Chapitre 6. Exercice A.2.8

1. Soit $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln(1+x)}{1+\sin x}$ définie au voisinage de $x = 0$.

$$\text{DL de } f \text{ en 0 à l'ordre 3 :} \quad f(x) \underset{x\approx 0}{=} \ln(1+x) \underset{x\approx 0}{=} \underbrace{x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3}}_{A_3(x)} + x^3\varepsilon_1(x)$$

$$\text{DL de sin en 0 à l'ordre 3 :} \quad \sin(x) \underset{x\approx 0}{=} x - \tfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)$$

$$\text{DL de } g \text{ en 0 à l'ordre 3 :} \quad g(x) \underset{x\approx 0}{=} 1 + \sin x \underset{x\approx 0}{=} \underbrace{1 + x - \tfrac{x^3}{6}}_{B_3(x)} + x^3\varepsilon_2(x)$$

Division selon les puissances croissantes de A_3 par B_3 sachant que $B_3(0) = 1 \neq 0$

$$\begin{array}{c|c}
x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} & 1 + x - \frac{x^3}{6} \\
\cline{1-1}\cline{2-2}
-x(1 + x - \frac{x^3}{6}) & \\
R_0 = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} & x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 \\
\cline{1-1}
-(-\frac{3}{2}x^2)(1 + x - \frac{x^3}{6}) & \\
R_1 = \frac{11}{6}x^3 + \frac{x^4}{6} - \frac{1}{4}x^5 & \\
\cline{1-1}
\dots &
\end{array}$$

Le DL de $\frac{f}{g}$ en $a = 0$ à l'ordre 3 est

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\approx 0}{=} \frac{\ln(1+x)}{1+\sin x} \underset{x\approx 0}{=} x - \frac{3}{2}x^2 + \tfrac{11}{6}x^3 + x^3\varepsilon_3(x)$$

2. Cette fois on considère la fonction $\frac{1}{1+\sin x} = g \circ f(x)$ avec $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \frac{1}{1+x}$.
On applique la règle de composition de DL :

- DL à l'ordre 3 pour f en $a = 0$: $\quad f(x) \underset{x\approx 0}{=} \underbrace{x - \dfrac{x^3}{6}}_{P_3(x)} + x^3\varepsilon_1(x)$
- DL à l'ordre 3 pour g en $b = f(0) = \sin 0 = 0$: $\quad g(y) \underset{y\approx 0}{=} \underbrace{1 - y + y^2 - y^3}_{Q_3(y)} + y^3\varepsilon_2(y)$
- DL de $g \circ f$ à l'ordre 3 en $a = 0$: on pose $y = P_3(x) - b = x - \frac{x^3}{6}$

$$\begin{aligned}
g \circ f(x) &\underset{x\approx 0}{=} 1 - [x - \tfrac{x^3}{6}] + [x - \tfrac{x^3}{6}]^2 - [x - \tfrac{x^3}{6}]^3 + x^3\varepsilon_3(x) \\
&\underset{x\approx 0}{=} 1 - x + \tfrac{x^3}{6} + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon_3(x) \\
&\underset{x\approx 0}{=} 1 - x + x^2 - \tfrac{5x^3}{6} + x^3\varepsilon_3(x)
\end{aligned}$$

3. On effectue le produit des DLs de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+\sin x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{1+\sin x} &= [x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3}] \times [1 - x + x^2 - \tfrac{5x^3}{6}] + x^3\varepsilon(x) \\
&= [x - x^2 + x^3] + [-\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{2}] + \tfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \\
&= x - \tfrac{3x^2}{2} + (1 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{3})x^3 + \tfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \\
&= x - \tfrac{3x^2}{2} + \tfrac{11}{6}x^3 + \tfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

4. A faire avec les divisions selon les puissances croissantes.

(a) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x}{\cos x}$

$$e^x \underset{x\approx 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$$

$$\cos(x) \underset{x\approx 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x)$$

$$\begin{array}{c|c}
1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} & 1 - \frac{x^2}{2} \\
\hline
-1(1 - \frac{x^2}{2}) & 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 \\
R_0 = x + x^2 + \frac{x^3}{6} & \\
\hline
-x(1 - \frac{x^2}{2}) & \\
R_1 = x^2 + \frac{2}{3}x^3 & \\
\hline
-x^2(1 - \frac{x^2}{2}) & \\
R_2 = \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{2} & \\
\hline
\dots &
\end{array}$$

Conclusion : $\frac{e^x}{\cos x} \underset{x\approx 0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

(b) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin x}{x}$

Il faut un DL de sin à l'ordre 5 pour obtenir le résultat final à l'ordre 4 (après simplification par x).

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4\varepsilon(x)$$

(c) Écrire $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$

$$\begin{array}{c|c}
1 & 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \\
\hline
-1(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}) & 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 \\
R_1 = \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} & \\
\hline
-\frac{x^2}{6}(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}) & \\
R_2 = \frac{7}{360}x^4 - \frac{x^6}{720} & \\
\hline
\dots &
\end{array}$$

Conclusion : $\frac{x}{\sin x} \underset{x\approx 0}{=} 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + x^4\varepsilon(x)$

Chapitre 6. Exercice A.2.23 - Question 2

- Pour obtenir l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0, il faut déterminer le développement limité (D.L.) à l'ordre 1 de f en 0.
- Pour connaître la position de la courbe par rapport à la tangente, il faut un terme supplémentaire dans le D.L. (qui n'est pas forcément l'ordre 2).

Correction : D.L. à l'ordre 3 en 0 :

$$1+e^{-x} = 1+(1+(-x)+\frac{1}{2!}(-x)^2-\frac{1}{3!}(-x)^3)+x^3\varepsilon(x) = 2-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon(x)\ .$$

Voici trois méthodes pour obtenir le D.L. :

1) Division selon les puissances croissantes :

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & & & & & & & & & 2-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \\
\hline
 & + & \frac{x}{2} & - & \frac{x^2}{4} & + & \frac{x^3}{12} & & & \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{48} \\
 & & & & & - & \frac{x^3}{24} & \ldots & &
\end{array}$$

2) Composition de D.L.

$$\frac{1}{2+X} \underset{X\approx 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{X}{2}+\frac{X^2}{4}-\frac{X^3}{8}\right)+X^3\varepsilon(X)$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+e^{-x}} &= \frac{1}{2}-\frac{(-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3)}{4}+\frac{(-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3)^2}{8}-\frac{(-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3)^3}{16}+x^3\varepsilon(x) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^3}{16}+x^3\varepsilon(x) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{48}+x^3\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

3) Application de la formule de Taylor-Young :

$$\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)' = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \qquad \Longrightarrow f'(0)=\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)'' = \frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}+\frac{2(e^{-x})^2}{(1+e^{-x})^3} \qquad \Longrightarrow f''(0)=-\frac{1}{4}+\frac{2}{8}=0$$

$$\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)''' = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}-\frac{2(e^{-x})^2}{(1+e^{-x})^3}-\frac{4(e^{-x})^2}{(1+e^{-x})^3}+\frac{6(e^{-x})^3}{(1+e^{-x})^4} \qquad \Longrightarrow f'''(0)=-\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{4}{8}+\frac{6}{16}=-\frac{1}{8}$$

(un peu compliqué donc à éviter...)

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+x^3\varepsilon(x) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{48}+x^3\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

On en déduit que l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$. Pour en déduire la position de la courbe par rapport à la tangente, il faut étudier le signe de la différence $f(x) - y$ en fonction de x :

$$f(x) - y = -\frac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)$$

Le reste $x^3\varepsilon(x)$ est négligeable par rapport au terme $-\frac{x^3}{48}$. On obtient

$$x < 0 \Rightarrow f(x) - y > 0 \Rightarrow \text{La courbe représentative de } f \text{ est située au dessus de la tangente}$$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) - y < 0 \Rightarrow \text{La courbe représentative de } f \text{ est située en dessous de la tangente}$$

Exercice A.2.10 - question 2

2. On écrit $\ln(1+\cos x) = g \circ f(x)$ avec $f(x) = \cos x$ et $g(y) = \ln(1+y)$

(i) DL de f en $a = 0$ à l'ordre 3 : $f(x) = cosx = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

(ii) DL de g en $b = f(0) = 1$ à l'ordre 3 : $g(1+k) = \ln(2+k) = \ln 2 + \ln(1+\frac{k}{2}) = \ln 2 + \frac{k}{2} - \frac{k^2}{8} + \frac{k^3}{24} + k^3\varepsilon(k)$

(iii) On compose les DLs en posant $k = -\frac{x^2}{2}$:

$$\ln(1+\cos x) = \ln 2 - \frac{x^2}{4} + x^3\varepsilon(x). \quad .$$

6. On écrit $(1+x)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = g \circ f(x)$ avec $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ et $g(y) = e^y$.

(i) DL de f en $a = 0$ à l'ordre 2 : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$.

(ii) DL de g en $b = f(0) = 1$ à l'ordre 2 : $g(1+k) = e^{1+k} = e \times e^k = e(1+k+\frac{k^2}{2}) + k^2\varepsilon(k)$

(iii) On compose les DLs en posant $k = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}$:

$$(1+x)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8}\right) + x^2\varepsilon(x) \quad .$$

D'où $(1+x)^{1/x} = e(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24}) + x^2\varepsilon(x)$.