Chapitre 6. Exercice A.2.1

1. On utilise la formule de Taylor pour les polynômes P de degré 3

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3.$$

Donc pour $a = 0$ et avec les notations de l'énoncé on obtient

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{6}x^3.$$

2. Pour $a = x_0$, on obtient

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \frac{a_2}{2}(x-x_0)^2 + \frac{a_3}{6}(x-x_0)^3.$$

3. Soit $P(x) = x^3 - 2x$. Il faut trouver la valeur de x_0 et les coefficients α_0, α_1, α_2 et α_3 de sorte que P s'écrive

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-1) + \alpha_2(x-1)^2 + \alpha_3(x-1)^3.$$

Par identification on trouve

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 1 \\ \alpha_0 & = & P(1) = -1 \\ \alpha_1 & = & P'(1) = 1 \\ \alpha_2 & = & \frac{P^{(2)}(1)}{2} = 3 \\ \alpha_3 & = & \frac{P^{(3)}(1)}{6} = 1. \end{array}\right.$$

Demander leur de vérifier l'égalité des deux polynômes en développant l'expression

$$-1 + (x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

Chapitre 6. Exercice A.2.2

Questions 1 et 2 : Taylor-Young à l'ordre 4 et recherche d'infiniment petit en $a = 0$

Soit f une fonction 4 fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ alors il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{et } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Cette fonction f est un infiniment petit en 0 si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Comme f est continue, il suffit de vérifier si $f(0) = 0$. Sa partie principale est *le premier terme non nul du développement de Taylor-Lagrange*. L'ordre de la partie principale obtenue est *sa puissance*.

(i) $f(x) = \alpha - \cos x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = (\alpha - 1) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x).$$

Si $\alpha \neq 1$ alors $f(0) = \alpha - 1 \neq 0$ donc f n'est pas un infiniment petit.
Si $\alpha = 1$ alors $f(0) = 0$ et la partie principale est $\frac{x^2}{2}$ d'ordre 2.

(ii) $f(x) = \alpha - e^x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = (\alpha - 1) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x).$$

Si $\alpha \neq 1$ alors $f(0) = \alpha - 1 \neq 0$ donc f n'est pas un infiniment petit.
Si $\alpha = 1$ alors $f(0) = 0$ et la partie principale est x d'ordre 1.

(iii) $f(x) = \sin x - \alpha x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = (1 - \alpha)x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x).$$

Pout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $f(0) = 0$ donc f est un infiniment petit.
Sa partie principale change selon les valeurs de α.
Si $\alpha \neq 1$ alors la partie principale est $(1 - \alpha)x$ d'ordre 1.
Si $\alpha = 1$ alors la partie principale est $-\frac{x^3}{3!}$ d'ordre 3.

(iv) $f(x) = \ln(2 + x)$.

$$f(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{64} + x^4\varepsilon(x).$$

On a $f(0) = \ln(2) \neq 0$ donc f n'est pas un infiniment petit.

(v) $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_1(x),$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_2(x),$$

On soustrait ces développements pour obtenir

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x).$$

On a $f(0) = 0$ donc c'est un infiniment petit et sa partie principale est x d'ordre 1.

(vi) $f(x) = \cosh x - 1$. On ajoute les développements de e^x et e^{-x} précédent pour obtenir

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$$

On a $f(0) = 0$ donc c'est un infiniment petit et sa partie principale est $\frac{x^2}{2}$ d'ordre 2.

(vii) $f(x) = (1+x)^4 - \alpha x - 1$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un polynôme de degré 4 donc sa dérivée 5ème est nulle. Le reste de Lagrange est nul.

$$f(x) = (4-\alpha)x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Pout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $f(0) = 0$ donc f est un infiniment petit.
Sa partie principale change selon les valeurs de α.
Si $\alpha \neq 4$ alors la partie principale est $(4-\alpha)x$ d'ordre 1.
Si $\alpha = 4$ alors la partie principale est $6x^2$ d'ordre 2.

Exercice A.2.19
Pour chaque fonction, il faut déterminer les trois premiers termes du D.L. en 0 et choisir les bonnes valeurs de a et b (ou de c et d) pour annuler les 2 premiers termes du DL. La partie principale sera donc le 3ème terme.

- $\tan x + a\sin x + b\sin^2 x$:
  Obtenir
  $$\tan x + a\sin x + b\sin^2 x = (1+a)x + bx^2 + (\frac{1}{3} - \frac{a}{6})x^3 + o(x^3)$$
  On pose $a = -1$ et $b = 0$ pour obtenir une partie principale d'ordre 3 qui est $(\frac{1}{3} - \frac{a}{6})x^3 = \frac{1}{2}x^3$.
  Pour la fonction tangente, on utilise la formule de Taylor Young en $a = 0$ à l'ordre 3
  $$\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan x = \tan(0) + \tan'(0)x + \frac{\tan''(0)}{2}x^2 + \frac{\tan^{(3)}(0)}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x),\ \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$$
  Les dérivées successives sont
  $$\tan' x = 1+\tan^2 x, \quad \tan''(x) = 2(1+\tan^2 x)\tan x, \quad \tan^3 x = 4(1+\tan^2 x)\tan^2 x + 2(1+\tan^2 x)^2$$
  On obtient
  $$\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan x = 0 + 1\times x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$$

- $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + c\cos x + d\tan x$:
  Obtenir
  $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + c\cos x + d\tan x = (1+c) + (-\frac{1}{2} + d)x + (\frac{3}{8} - \frac{c}{2})x^2 + o(x^2)$$
  On pose $c = -1$ et $d = \frac{1}{2}$ et la partie principale est $(\frac{3}{8} - \frac{c}{2})x^2 = \frac{7}{8}x^2$.
  Pour la formule de Taylor-Young de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, il faut se référer au DL usuel en $a = 0$ de $(1+x)^\alpha$:
  $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}\times(-\frac{3}{2})}{1\times 2}x^2 + x^2\varepsilon(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x),\ \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$