Chapitre 7. Exercice A.2.4

1. On pose $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$. La fonction f étant continue, disons sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive F définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$. On peut donc écrire

$$g(x) = \Big[F(x)\Big]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x)).$$

La fonction g est alors composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable et on a

$$g'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

2. Soit $a \geq 0$ et $c \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \int_{x-a}^{x+a} f(t)\,dt = c.$$

On veut montrer que f est $2a$-périodique, autrement dit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+2a) = f(x).$$

Pour démontrer ceci, on applique le résultat de la question **1.** avec $u(x) = x - a$ et $v(x) = x + a$. Les fonctions u et v ainsi définies sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par conséquent la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_{x-a}^{x+a} f(t)\,dt$$

est dérivable et $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f(x+a) - f(x-a)$. Or, par hypothèse, la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$ donc $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 0$. On obtient

$$f(x+a) - f(x-a) = 0 \Leftrightarrow f(x+a) = f(x-a) \underset{\substack{\text{chang}^{\text{t}}\text{ de var.} \\ X = x-a}}{\Leftrightarrow} f(X+2a) = f(X).$$

Chapitre 7. Exercice A.2.5

1. Ne pas utiliser le 1er théorème de la moyenne. Comme au A.2.4, question 1, introduire la primitive F de f qui s'annule en a

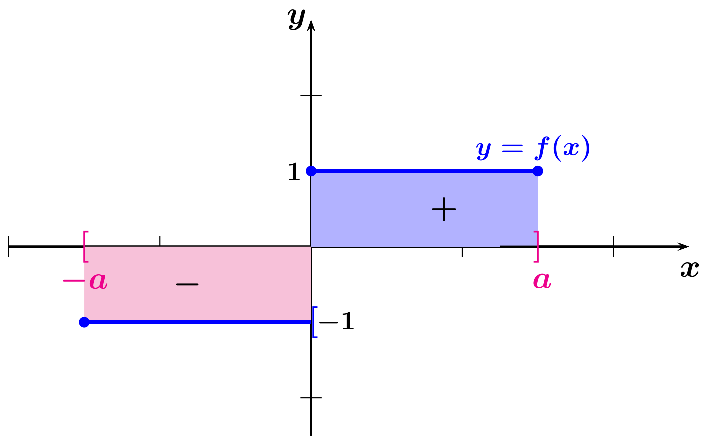
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

et appliquer le théorème de Rolle sachant que $F(a) = F(b) = 0$.

2. On vient de démontrer l'implication suivante

$$f \text{ continue sur } [a,b] \text{ et } \int_a^b f(t)\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathscr{C}_f \text{ traverse l'axe des abscisses au moins une fois.}$$

Si la fonction f n'est pas continue cette implcation est fausse.
Prenons $a > 0$, $b = -a$ et la fonction étagée non continue en 0 suivante



D'après la formule d'intégration des fonctions étagées, on a bien

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = -1 \times (0 - (-a)) + 1 \times (a - 0) = 0,$$

et pourtant la courbe représentative ne traverse pas l'axe des abscisses.

3. La valeur moyenne m de f sur $[a,b]$ est $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

<u>hypothèse</u> : f continue sur $[0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.

Montrer que f admet un point fixe revient à montrer que que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution. On utilise alors le résultat de la question **1.** pour montrer que la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x) - x$, s'annule au moins une fois dans $[0,1]$.

• On précise que g est continue sur $[0,1]$ par somme de fonctions continues (f et un polynôme).
• On calcule

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 (f(t) - t)\,dt = \int_0^1 f(t)dt - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

D'après la question **1.**, on en déduit qu'$\exists\, c \in]0,1[$, $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. Le nombre c est un point fixe de f.

Chapitre 7. Exercice A.2.14 questions 3 et 4

3a)

$$\int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_a^1 = -\ln a.$$

3b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, On encadre $f(x) = \frac{1}{x}$ par deux fonctions étagées u_n et U_n sur la subdivision régulière de pas $h = \frac{1}{n+1}$:

$$x_0 = a = \frac{1}{n+1} \quad < \quad x_1 = \frac{2}{n+1} \quad < \quad \cdots \quad < \quad x_k = \frac{k+1}{n+1} \quad < \quad \cdots \quad < \quad x_n = \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

$$\forall\ k = 0, \ldots, n-1,\ \forall\, x \in]x_k, x_{k+1}[,\ u_n(x) = \frac{1}{x_k} = \frac{n+1}{k+2} \qquad \text{et} \qquad U_n(x) = \frac{1}{x_k} = \frac{n+1}{k+1}$$

La fonction f est monotone donc intégrable. De plus,

$$\Rightarrow \quad \int_a^1 u_n(t)\,dt \le \int_a^1 f(t)\,dt \le \int_a^1 U_n(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} h \times \frac{n+1}{k+2} \le \int_a^1 f(t)\,dt \le \sum_{k=0}^{n-1} h \times \frac{n+1}{k+1}$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^1 f(t)\,dt \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Dans la dernière inégalité, on a décalé les indices k de 0 à $n-1$ d'une unité pour varier de 1 à n.

3c) Or pour $a = \frac{1}{n+1}$ on a

$$\int_a^1 f(t)\,dt = \ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Comme $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, la série harmonique $\sum\limits_{n\ge1} \frac{1}{n}$ aussi.

4a) $\displaystyle\int_a^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \Big[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big]_a^1 = \frac{(\frac{1}{a})^{\alpha-1}-1}{\alpha-1}.$

4b) On encadre $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ comme précédemment

$$\sum_{k=1}^{n} h \times \left(\frac{n+1}{k+1}\right)^\alpha \le \int_a^1 f(t)\,dt = \frac{(n+1)^{\alpha-1}-1}{\alpha-1} \le \sum_{k=1}^{n} h \times \left(\frac{n+1}{k}\right)^\alpha$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)^{\alpha-1}}{(k+1)^\alpha} \le \int_a^1 f(t)\,dt = \frac{(n+1)^{\alpha-1}-1}{\alpha-1} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)^{\alpha-1}}{k^\alpha}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \le \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \int_a^1 f(t)\,dt = \frac{1-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}}{\alpha-1} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

4c) $0 < \alpha < 1$ alors $\frac{1-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}}{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et la série $\sum\limits_{n\ge1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Si $\alpha > 1$ alors $\frac{1-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}}{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha-1}$ et la série $\sum\limits_{n\ge1} \frac{1}{n^\alpha}$ est croissante et majorée donc converge.