Chapitre 6. Exercice A.2.12

Soit

$$f(x) = 3 + \int_0^x e^{t^2}\, dt.$$

On note que $f(0) = 3$. La fonction f est dérivable et $f'(x) = e^{x^2}$. Comme f' est composée de exponentielle et d'un polynôme, on sait que f' (et donc f aussi) est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (càd infiniment continûment dérivable). Pour obtenir le DL à l'ordre 6 au voisinage de $a = 0$ de f on va intégrer le DL à l'ordre 5 de f' :

cours : on pose $x = a + h$ et

$$f'(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h) \quad \Rightarrow \quad f(a+h) = f(a) + \underbrace{\alpha_1 \frac{h^2}{2} + \cdots + \alpha_n \frac{h^n}{h}}_{\text{primitive de la partie rég. de } f'} + h^{n+1}\tilde{\varepsilon}(h)$$

et $\tilde{\varepsilon}(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$

• pour $a = 0$, on a $x = h$. DL de $f'(x)$:

$$e^t \underset{t\approx 0}{=} 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon_1(t) \text{ (les termes d'ordre supérieurs sont inutiles)}$$

On pose $t = x^2$:

$$f'(x) = e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + x^6\varepsilon_2(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + x^5\varepsilon_3(x)$$

On a dit que le DL à l'ordre 5 pour f' suffit pour avoir le DL à l'ordre 6 pour f. Par intégration on obtient

$$f(x) = f(0) + \underbrace{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5}_{\text{primitive de la partie rég. de } f'(x)} + x^6\varepsilon_4(x) = 3 + (x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5) + x^6\varepsilon_4(x)$$

Chapitre 7. Exercice A.2.16

Quelques formules

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| \quad \text{et pour } \alpha \neq 1 \int \frac{u'(x)}{\big(u(x)\big)^{\alpha}}\,dx = -\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{\big(u(x)\big)^{\alpha-1}}$$

$$(\sqrt{u})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

3. 1 seule I.P.P. avec $u'(x) = 1$ et $v(x) = \text{Arcsin}\,x$.
On calcule $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned}\int \text{Arcsin}\,x\,dx &= x\text{Arcsin}\,x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= x\text{Arcsin}\,x + \sqrt{1-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

4. On a $P(x) = x^2 + x + 1$ donc $\deg P = 2$. Il faut effectuer 2 I.P.P en dérivant le polynôme.
On pose $u'(x) = e^{2x}$ et $v(x) = x^2 + x + 1$
On calcule $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ et $v'(x) = 2x + 1$

$$\int (x^2 + x + 1)e^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}(x^2 + x + 1) - \tfrac{1}{2}\int e^{2x}(2x + 1)\,dx$$

On pose $u'(x) = e^{2x}$ et $v(x) = 2x + 1$
On calcule $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ et $v'(x) = 2$

$$\begin{aligned}\int (x^2 + x + 1)e^{2x}\,dx &= e^{2x}\frac{(x^2 + x + 1)}{2} - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}(2x + 1) - \int \tfrac{1}{2}e^{2x} \times 2dx\right)\\ &= e^{2x}\frac{(x^2 + x + 1)}{2} - e^{2x}\frac{2x + 1}{4} + \tfrac{1}{2}\int e^{2x}dx\\ &= e^{2x}\frac{2x^2 + 1}{4} + \frac{1}{4}e^{2x} + C, \quad C \in \mathbb{R}\\ &= e^{2x}\frac{2x^2 + 2}{4} + C = e^{2x}\frac{x^2 + 1}{2} + C.\end{aligned}$$

5. On a $P(x) = x$ donc $\deg P = 1$. Il faut effectuer 1 I.P.P en dérivant le polynôme.
On pose $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = x$
On calcule $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = 1$

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= -x\cos x - \int (-\cos x) \times 1\,dx\\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx\\ &= -x\cos x + \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

6. On effectue 2 I.P.P puis on résout une équation d'inconnue

$$G(x) = \int \sin x\, e^{2x}\,dx.$$

On pose $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = e^{2x}$
On calcule $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = 2e^{2x}$

$$G(x) = -e^{2x}\cos x + 2\int \cos x\, e^{2x}\,dx$$

On pose $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = e^{2x}$
On calcule $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = 2e^{2x}$

$$G(x) = -e^{2x}\cos x + 2\left(e^{2x}\sin x - \int 2e^{2x}\sin x\right)$$

$$G(x) = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad 5G(x) = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x + C$$

$$\Rightarrow \quad G(x) = \frac{-e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x + C}{5} = \frac{-e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x}{5} + \widetilde{C}.$$

Chapitre 7. Exercice A.2.23

1. Effectuer le changement de variable $x = \sqrt{2t+1}$ pour déterminer la forme générale des primitives de $\frac{2t}{\sqrt{2t+1}}$:

• Exprimer dt en fonction de dx

$$x = \sqrt{2t+1} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x^2-1}{2}$$

On "dérive l'ancienne variable par rapport à la nouvelle variable"

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d[\frac{x^2-1}{2}]}{dx} = x \quad \Rightarrow dt = x\,dx$$

• On modifie l'intégrande

$$\frac{2t}{\sqrt{2t+1}} = \frac{x^2-1}{x}$$

• Transformer l'intégrale en t en une intégrale en x et terminer le calcul

$$\begin{aligned}
\int \frac{2t}{\sqrt{2t+1}}\,dt &= \int \frac{x^2-1}{x} \times x\,dx \\
&= \int (x^2-1)\,dx \\
&= \frac{x^3}{4} - x + C \\
&= \frac{(\sqrt{2t+1})^3}{3} - \sqrt{2t+1} + C \\
&= \frac{(2t+1)\sqrt{2t+1}}{3} - \sqrt{2t+1} + C \\
&= \sqrt{2t+1}\left(\frac{2t+1}{3} - 1\right) + C \\
&= \sqrt{2t+1}\frac{2t-2}{3} + C
\end{aligned}$$

2. Effectuer le changement de variable $x = \sqrt{e^t-1}$ pour déterminer la forme générale des primitives de $\frac{e^t}{(1+e^t)\sqrt{e^t-1}}$:

• Exprimer dt en fonction de dx

On "dérive l'ancienne variable par rapport à la nouvelle variable"

$$x = \sqrt{e^t-1} \quad \Leftrightarrow \quad e^t = x^2+1 \quad \Leftrightarrow \quad t = \ln(x^2+1)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d[\ln(x^2+1)]}{dx} = \frac{2x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

• On modifie l'intégrande

$$\frac{e^t}{(1+e^t)\sqrt{e^t-1}} = \frac{x^2+1}{(x^2+2)x}$$

• Transformer l'intégrale en t en une intégrale en x et poursuivre le calcul

$$\int \frac{e^t}{(1+e^t)\sqrt{e^t-1}}\,dt = \int \frac{x^2+1}{(x^2+2)x} \times \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2}{x^2+2}\,dx$$

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (\text{Arctan} \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$$

$$\frac{2}{2+x^2} = \frac{2}{2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{2}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{e^t}{(1+e^t)\sqrt{e^t-1}}\,dt &= \int \frac{2}{x^2+2}\,dx \\ &= \sqrt{2}\text{Arctan}(\tfrac{x}{\sqrt{2}}) + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &= \sqrt{2}\text{Arctan}(\tfrac{\sqrt{e^t-1}}{\sqrt{2}}) + C\end{aligned}$$

Changement de variable avec $x = \varphi(t)$ dans l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

• Changer les bornes :

$$t = a \Leftrightarrow \text{ calculer } x = \varphi(a)$$

$$t = b \Leftrightarrow \text{ calculer } x = \varphi(b)$$

• Exprimer dt en fonction de dx
On "dérive l'ancienne variable par rapport à la nouvelle variable"

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d[\varphi(x)]}{dx} = \varphi'(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x)\,dx$$

• On modifie l'intégrande

$$f(t) = f(\varphi(x))$$

• Transformer l'intégrale en t en une intégrale en x

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$$

Chapitre 7. Exercice A.2.24

2. Primitive de f_5 :
Soit $f_5(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$. Il faut mettre $f_5(x)$ sous la forme $f_5(x) = \alpha \times \frac{1}{1+(u(x))^2}$ où α est un réel et u est une fonction à trouver. Pour cela il faut mettre le dénominateur sous forme canonique.

$$x^2 - x + 1 = (x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} + 1 = (x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}.$$

Ensuite, on factorise le dénominateur par la constante apparaissant à côté du carré. Ici il s'agit de $\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} f_5(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} \times \frac{1}{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2 + 1} &= \frac{4}{3} \times \frac{1}{(\sqrt{\frac{4}{3}})^2 (x-\frac{1}{2})^2 + 1} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))^2 + 1} \end{aligned}$$

L'expression obtenue ressemble à la dérivée de Arctan t à une constante près :

$$\text{Arctan}'\, t = \frac{1}{1+t^2}\,.$$

On procède au changement de variable $t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}) = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$:

• on calcule x en fonction de t : $x = \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{2}$.

• on dérive l'ancienne variable x par rapport à la nouvelle variable t :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\, dt$$

• On transforme l'intégrand

$$\begin{aligned} \int f_5(x)\, dx = \int \frac{4}{3} \times \frac{1}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2 + 1}\, dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{t^2+1} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\, dt &= \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan}\, t + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Primitive de f_6 :
Soit $f_6(x) = \frac{2-x}{x^2-x+1}$. Il faut exprimer le numérateur en fonction de la dérivée du dénominateur $v(x) = x^2 - x + 1$, c'est-à-dire trouver deux constantes α et β telles que

$$2 - x = \alpha \times v'(x) + \beta\,.$$

On calcule donc $v'(x) = 2x - 1$. L'égalité ci-dessus devient

$$2 - x = \alpha(2x-1) + \beta = 2\alpha x - \alpha + \beta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 = 2\alpha \\ 2 = -\alpha + \beta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{3}{2} \end{cases}$$

La fraction f_6 se réécrit

$$f_6(x) = \frac{-\frac{1}{2} \times v'(x) + \beta}{v(x)} = -\frac{1}{2} \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{3}{2} \frac{1}{v(x)}\,.$$

Le premier terme est la dérivée de $\ln|v(x)|$ et le second terme correspond à la fonction f_5 (à une constante près).

$$\begin{aligned} \int f_6(x)\, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{v'(x)}{v(x)}\, dx + \frac{3}{2} \int f_5(x)\, dx &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \sqrt{3} \text{Arctan} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice hors poly

1. On définit les polynômes $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $Q(x) = x^2 + x + 1$.
   (a) Diviser P par Q suivant les puissances croissantes (on veut un reste de valuation 3).
   (b) En déduire une primitive de la fonction $\dfrac{x^3 + 3x^2 + x + 1}{x^3(x^2 + x + 1)}$.
   Réponse : $-\dfrac{1}{2x^2} + 2\ln|x| - \ln(x^2 + x + 1) + C$
2. En s'inspirant de la méthode précédente, trouver une primitive de $\dfrac{1}{x^4(x^2 - 2x + 2)}$.
   Réponse : $-\dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{4x^2} - \dfrac{1}{6x^3} - \dfrac{1}{4}\text{Arctan}(x-1) + C$.

Q1.

(a) Un reste de valuation 3 est un reste dont la puissance du terme de plus bas degré est égale à 3. Autrement dit, on veut un reste factorisable par x^3.
Attention ! ne pas confondre division euclidienne et division selon les puissances croissantes.

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & + & x & + & 3x^2 & + & x^3 & & & 1 + x + x^2 \\
\hline
-1 & - & x & - & x^2 & & & & & \\
 & & & & 2x^2 & + & x^3 & & & \\
\cline{1-9}
 & & & & -2x^2 & - & 2x^3 & - & 2x^4 & 1 + 2x^2 \\
 & & & & & & -x^3 & - & 2x^4 &
\end{array}$$

Conclusion : $P(x) = Q(x)(1 + 2x^2) - (x^3 + 2x^4)$.

(b) On cherche une primitive de $F(x) = \dfrac{P(x)}{x^3 Q(x)}$. Pour cela on modifie l'expression de F en utilisant le résultat précédent.

$$F(x) = \frac{Q(x)(1+2x^2) - (x^3 + 2x^4)}{x^3 Q(x)} = \frac{Q(x)(1+2x^2)}{x^3 Q(x)} - \frac{(x^3 + 2x^4)}{x^3 Q(x)} = \frac{1 + 2x^2}{x^3} - \frac{1 + 2x}{Q(x)}$$

$$\begin{aligned}
\int F(x)\,dx = \int \left(\frac{1+2x^2}{x^3} - \frac{1+2x}{1+x+x^2}\right) dx &= \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} - \frac{1+2x}{1+x+x^2}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{1+2x}{1+x+x^2}\right) dx \\
&= -\frac{1}{2x^2} + 2\ln|x| - \ln(1 + x + x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
&= -\frac{1}{2x^2} + \ln\left(\frac{x^2}{1+x+x^2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Q2.

(a) On effectue la division de $P(x) = 1$ par $Q(x) = 2 - 2x + x^2$ avec un reste de valuation 4 (afin de simplifier la fraction par x^4 plus tard). On trouve

$$1 = (2 - 2x + x^2) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) - \frac{x^4}{4}$$

(b) On cherche une primitive de $F(x) = \dfrac{P(x)}{x^4 Q(x)}$. Pour cela on modifie l'expression de F en utilisant le résultat précédent.

$$F(x) = \frac{Q(x)(x^2-2x+2) - \frac{x^4}{4}}{x^4 Q(x)} = \frac{Q(x)(x^2-2x+2)}{x^4 Q(x)} - \frac{\frac{x^4}{4}}{x^4 Q(x)} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}}{x^4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{x^2-2x+2}$$
$$= \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+(x-1)^2}$$

La forme générale des primirives est

$$\int F(x)\,dx = -\frac{1}{6x^3} - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4x} - \frac{1}{4}\mathrm{Arctan}(x-1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 7. Exercice A.2.25

1.

(a) Il faut effectuer le changement de variable $\boxed{x = \sin t}$.

• On dérive l'ancienne variable par rapport à la nouvelle variable :

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \quad \Rightarrow \quad dx = \cos t\, dt$$

• On change les bornes :

$$x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\pi}{6}$$
$$x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = -1 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{\pi}{2}$$

• On transforme l'intégrale :

$$I_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2 t} \times \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos t \times \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\, dt$$

Pour intégrer $\cos^2 t$, il faut linéariser l'expression $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$.

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \left(-\frac{\pi}{4} + 0\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

(b) Si a=0 alors $I_2 = 0$.
On suppose $a \neq 0$ et on commence par factoriser l'intégrande par $\sqrt{a^2} = |a|$ pour obtenir une expression similaire à la précédente

$$I_2 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^a \sqrt{a^2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = |a| \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx$$

Ensuite on effectue le changement de variable $\boxed{\frac{x}{a} = \sin t}$.

• On dérive l'ancienne variable par rapport à la nouvelle variable :

$$x = a \sin t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = a \cos t \quad \Rightarrow \quad dx = a \cos t\, dt$$

• On change les bornes :

$$x = a \quad \Leftrightarrow \quad a \sin t = a \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}$$
$$x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \sin t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$$

• On transforme l'intégrale :

$$I_2 = |a| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \times a \cos t\, dt = a|a| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = a|a| \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a|a| \frac{\pi}{4}$$

c) On commence par mettre le polynôme sous forme canonique puis on procède comme au **b)**.

$$-x^2 + 3x - 2 = -(x^2 - 3x + 2) = -\left((x - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{9}{4} + 2\right) = -\left((x - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{4} - (x - \tfrac{3}{2})^2$$

On factorise l'intégrand par $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
I_3 = \int_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{-x^2+3x-2}\,dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{\tfrac{1}{4}-(x-\tfrac{3}{2})^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{\frac{1}{4}}(x-\tfrac{3}{2})^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-4(x-\tfrac{3}{2})^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-(2x-3)^2}\,dx
\end{aligned}$$

Ensuite on effectue le changement de variable $\boxed{2x-3=\sin t}$.
• On dérive l'ancienne variable par rapport à la nouvelle variable :

$$x = \frac{\sin t + 3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\cos t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}\cos t\, dt$$

• On change les bornes :

$$\begin{aligned}
x = \tfrac{3}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \sin t = 2\times\tfrac{3}{2}-3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t=0 \\
x = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin t = 2\times 1-3=-1 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

• On transforme l'intégrale :

$$I_3 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\times\frac{1}{2}\cos t\,dt = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{1}{4}\Big(0-\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big) = \frac{\pi}{16}$$