Chap7. Exercice A.2.19. Intégrales de suites de fonctions

1. On utilise le théorème des gendarmes ou ses corollaires :

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in [a,b],\ |f_n(x)| \le u_n \quad &\Rightarrow \quad \forall\, x \in [a,b],\ -u_n \le f_n(x) \le u_n \\
&\Rightarrow \quad \int_a^b -u_n\, dt \le \int_a^b f_n(t)\, dt \le \int_a^b u_n\, dt \\
&\Rightarrow \quad -u_n(b-a) \le \int_a^b f_n(t)\, dt \le u_n(b-a)
\end{aligned}$$

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

2. Tout d'abord, d'après l'échelle de comparaison à l'infini, on a

$$x > 0 \Rightarrow \frac{n^\alpha}{e^{nx}} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0.$$

De plus $f_n(0) = 0$ donc $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$. Par conséquent la suite de fonction $f_n(x)$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle.
On calcule $u_n = \max\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$:

$$f_n'(x) = n^\alpha e^{-nx}(1-nx).$$

x	0		$\frac{1}{n}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$u_n = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$	$\searrow$	$n^\alpha e^{-n}$

On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$ ssi $\alpha < 1$, on en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction identiquement nulle sur $D = [0,1]$ ssi $\alpha < 1$.
Calculons I_n :

$$I_n = n^\alpha \int_0^1 te^{-nt} dt = n^\alpha \left[\frac{te^{-nt}}{-n}\right]_0^1 + n^{\alpha-1}\int_0^1 e^{-nt} dt = -\frac{n^{\alpha-1}}{e^n} + n^{\alpha-1}\left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^1 = -\frac{n^{\alpha-1}+n^{\alpha-2}}{e^n} + n^{\alpha-2}.$$

On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ ssi $\alpha < 2$. Il n'y a donc pas équivalence à la question **1.**

$\boxed{\text{Quand est-il de la série de fonctions } \sum\limits_{n\ge 0} f_n(x)\,?}$

On pose pour tout $x \in [0,1]$, $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$. Le tableau de variations indique que les fonctions f_n sont positives donc (S_n) est une suite croissante dans le sens

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \ge 0,\ S_n(x) \le S_{n+1}(x).$$

De plus,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad 0 \le S_n(x) \le \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{\alpha-1}}{e}.$$

D'après les règles de Riemann, le majorant converge ssi $\alpha - 1 < -1 \Leftrightarrow \alpha < 0$. Dans ce cas $\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{\alpha-1}}{e}$ est bornée. Par conséquent $(S_n(x))$ est une suite croissante et majorée donc converge. On dit que (S_n) converge *normalement* vers une fonction limite (non calculable).

En ce qui concerne les intégrales, on a

$$0 \leq \int_0^1 S_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} I_k = \sum_{k=0}^{n} -\frac{k^{\alpha-1} + k^{\alpha-2}}{e^k} + k^{\alpha-2}$$

D'après les règles de Riemann, une condition suffisante de convergence sur α est $\alpha - 2 < -1 \Leftrightarrow \alpha < 1$.

3. Pour $x > 0$ fixé, on a

$$n \in [E(\tfrac{1}{x}) + 1, +\infty[\quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \leq x \quad \Rightarrow \quad f_n(x) = 0.$$

Dans ce cas $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
De plus $f_n(0) = 0$ donc $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Par conséquent la suite de fonction $f_n(x)$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle.
Quand une fonction est définie par morceaux, on utilise la relation de Chasle pour calculer son intégrale comme suit :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x)dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x(1-nx)dx + \underbrace{\int_{\frac{1}{n}}^1 0dx}_{=0}$$

$$= \left[\frac{n^2x^2}{2} - \frac{n^3x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{n^2 \times (\frac{1}{n})^2}{2} - \frac{n^3 \times (\frac{1}{n})^3}{3} = \frac{1}{6}.$$

Par contraposée de la question **1.**, la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction identiquement nulle sur $D = [0,1]$.
On aurait pû aussi démontrer que

$$u_n = \sup\{|f_n(x)|; x \in [0,1]\} = f_n(\tfrac{1}{2n}) = \frac{n}{4} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

Comme (u_n) ne converge pas vers 0, il n'y a pas convergence uniforme.

Chapitre 7. Exercice A.2.17

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

1. On veut utiliser le théorème des gendarmes pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

• Pour tout $x \in [0,1]$ on a $x^n \geq 0$ et $1 + x^n \geq 1$ donc

$$\frac{x^n}{1+x^n} \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx \geq \int_0^1 0\,dx = 0$$

• On cherche une fonction $f_n(x)$ simple telle que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \frac{x^n}{1+x^n} \leq f(x) \text{ et } \int_0^1 f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

On a $1 + x^n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^n} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$. Prenons $f_n(x) = x^n$ et on calcule

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n \quad \Rightarrow \quad I_n \leq \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes, $I_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

2. Intégration par parties d'après les règles données en cours :

On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(1+x^n)$

On calcule $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx &= \Big[x\ln(1+x^n)\Big]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\,dx \\ &= \ln 2 - nI_n\end{aligned}$$

$$\Rightarrow nI_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$$

3. On applique la formule de Taylor-Lagrange à $\ln(1+x)$ à l'ordre 1 en $a = 0$

La fonction ln est bien au moins 2 fois dérivable sur $]-1,+\infty[$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a+\theta(x-a))}{2}(x-a)^2$$

Pour $f(x) = \ln(1+x)$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ et } f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

On obtient

$$\forall\, x > -1, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{\underbrace{(1+\theta x)^2}_{\geq 0}} \leq x.$$

4. On utilise le résultat de la question **3.** pour montrer que $\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$

• Pour tout $x \in [0,1]$ on a $1 + x^n \geq 1 \Rightarrow \ln(1+x^n) \geq \ln 1 = 0$ car ln est croissante

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \ln(1+x^n) \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \geq \int_0^1 0\,dx = 0$$

• On sait que $\forall\, t > -1$, $\ln(1+t) \le t$. On pose $t = x^n$ et on a

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \ln(1+x^n) \le x^n \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \ln(1+x^n) \le \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

D'après le théorème des gendarmes on a bien $\int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
D'après la question **2.** on a

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \ln 2 - \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx = \ln 2.$$

Question supplémentaire : • Est-ce que la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ converge uniformément sur $D = [0,1]$ vers une fonction f à préciser ? NON ! La limite simple est $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = \frac{1}{2}$. La fonction f n'est pas continue alors que les fonctions f_n le sont donc il ne peut pas y avoir convergence uniforme.
• Est-ce que $\sum\limits_{n\ge 0} I_n$ est convergente ? NON !
Si chaque f_n est continue alors chaque somme partielle $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ est continue et donc intégrable. On a

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 f_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} I_k.$$

Cette série est divergente d'après les règles de Riemann car $\sum\limits_{n\ge 0} I_n$ est équivalents à $\sum\limits_{n\ge 0} \frac{\ln 2}{n}$.

Chapitre 7 – Exercice A.2.32

3. • Résolution de $xy'(x) - 2y(x) = x^3$.
L'équation est bien définie pour $x \in \mathbb{R}$. Cependant pour la résoudre nous devons isoler y' :

$$y'(x) = \frac{2}{x}y(x) + x^2.$$

On pose $a(x) = \frac{2}{x}$ et $b(x) = x^2$. Les fonctions a et b sont continues simultanément sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$ donc on résoud l'équation différentielle sur chaque intervalle puis on cherchera une solution maximale sur $\mathbb{R}$ si elle existe.
Une primitive de a est

$$A(x) = \int \frac{2}{x}\, dx = 2\ln|x| = \ln x^2.$$

La forme générale des solutions de l'équation homogène est , sur chaque intervalle,

$$\boxed{y_h(x) = \begin{cases} C_1 e^{\ln x^2} = C_1 x^2, & \text{si } x \in I_1 \\ C_2 e^{\ln x^2} = C_2 x^2, & \text{si } x \in I_2 \end{cases}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

On fait varier la constante pour déterminer une solution particulière : on pose $y_p(x) = \varphi(x)x^2$. On calcule la dérivée

$$y_p'(x) = \varphi'(x)x^2 + 2x\varphi(x).$$

On obtient, pour $x \in I_1$ ou $x \in I_2$

$$\begin{aligned} xy_p'(x) - 2y_p(x) = x^3 \quad &\Leftrightarrow \quad x\left(\varphi'(x)x^2 + 2x\varphi(x)\right) - 2\varphi(x)x^2 = x^3 \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi'(x)x^3 = x^3 \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi'(x) = 1. \end{aligned}$$

Une primitive est donc $\varphi(x) = x$ et une solution particulière est $y_p(x) = x^3$.
Finalement, la forme générale des solutions de l'équation avec second membre est donc

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \begin{cases} C_1 x^2 + x^3, & \text{si } x \in I_1 \\ C_2 x^2 + x^3, & \text{si } x \in I_2 \end{cases}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

• Résolution de $xy'(x) - y(x) = x^2 \sin(x)$.
L'équation est bien définie pour $x \in \mathbb{R}$. Cependant pour la résoudre nous devons isoler y' :

$$y'(x) = \frac{1}{x}y(x) + x\sin(x).$$

On pose $a(x) = \frac{1}{x}$ et $b(x) = x\sin(x)$. Les fonctions a et b sont continues simultanément sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$ donc on résoud l'équation différentielle sur chaque intervalle puis on cherchera une solution maximale sur $\mathbb{R}$ si elle existe.
Une primitive de a est

$$A(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|.$$

La forme générale des solutions de l'équation homogène est , sur chaque intervalle,

$$\boxed{y_h(x) = \begin{cases} C_1 e^{\ln|x|} = C_1|x| = -C_1 x = \widetilde{C}_1 x, & \text{si } x \in I_1 =]-\infty, 0[\\ C_2 e^{\ln|x|} = C_2|x| = C_2 x, & \text{si } x \in I_2 =]0, +\infty[\end{cases}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ et } \widetilde{C}_1 = -C_1.$$

On fait varier la constante pour déterminer une solution particulière : on pose $y_p(x) = \varphi(x)x$. On calcule la dérivée
$$y_p'(x) = \varphi'(x)x + \varphi(x).$$
On obtient, pour $x \in I_1$ ou $x \in I_2$
$$\begin{aligned} xy_p'(x) - y_p(x) = x^2\sin(x) \quad &\Leftrightarrow \quad x\big(\varphi'(x)x + \varphi(x)\big) - \varphi(x)x = x^2\sin(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi'(x)x^2 = x^2\sin(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi'(x) = \sin(x) \end{aligned}$$
Une primitive est donc $\varphi(x) = -\cos(x)$ et une solution particulière est $y_p(x) = -x\cos(x)$.
Finalement, la forme générale des solutions de l'équation avec second membre est donc
$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \begin{cases} \widetilde{C}_1 x - x\cos(x), & \text{si } x \in I_1 \\ C_2 x - x\cos(x), & \text{si } x \in I_2 \end{cases}}, \quad \widetilde{C}_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
$$\boxed{y(x) = Cx - x\cos(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
• Résolution de $y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = x\text{Arctan}(x)$.
Contrairement aux deux cas précédents, cette équation n'est pas définie en $x = 0$. On isole y' :
$$y'(x) = \frac{1}{x}y(x) + x\text{Arctan}(x).$$
On pose $a(x) = \frac{1}{x}$ et $b(x) = x\text{Arctan}(x)$. Ces deux fonctions sont simultanément continues sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$ donc on résout l'équation différentielle sur chaque intervalle. Mais nous ne chercherons pas de solution maximale sur $\mathbb{R}$.
Une primitive de a est
$$A(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|.$$
La forme générale des solutions de l'équation homogène est , sur chaque intervalle,
$$\boxed{y_h(x) = \begin{cases} C_1 e^{\ln|x|} = C_1|x| = -C_1 x = \widetilde{C}_1 x, & \text{si } x \in I_1 =]-\infty, 0[\\ C_2 e^{\ln|x|} = C_2|x| = C_2 x, & \text{si } x \in I_2 =]0, +\infty[\end{cases}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{et } \widetilde{C}_1 = -C_1.$$
On fait varier la constante pour déterminer une solution particulière : on pose $y_p(x) = \varphi(x)x$. On calcule la dérivée
$$y_p'(x) = \varphi'(x)x + \varphi(x).$$
On obtient, pour $x \in I_1$ ou $x \in I_2$
$$\begin{aligned} y_p'(x) - \frac{1}{x}y_p(x) = x\text{Arctan}(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \big(\varphi'(x)x + \varphi(x)\big) - \frac{1}{x} \times \varphi(x)x = x\text{Arctan}(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi'(x)x = x\text{Arctan}(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi'(x) = \text{Arctan}(x) \end{aligned}$$
On calcule une primitive de cette fonction à l'aide d'une intégration par parties
$$\varphi(x) = \int \text{Arctan}(x)\,dx = x\text{Arctan}(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Une solution particulière est donc

$$y_p(x) = x\varphi(x) = x^2\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2).$$

Finalement, la forme générale des solutions de l'équation avec second membre est donc

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \begin{cases} C_1 x + x^2\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2), & \text{si } x \in I_1 \\ C_2 x + x^2\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2), & \text{si } x \in I_2 \end{cases}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Chapitre7 - Exercice A.2.34

1. Il s'agit de déterminer la décomposition en éléments simples de $F(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}$. On a

$$\begin{aligned}
F(x)&=\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}\\
a&=\Big[xF(x)\Big]_{x=0}=\Big[\frac{1}{(x-1)(x+1)}\Big]_{x=0}=-1\\
b&=\Big[(x-1)F(x)\Big]_{x=1}=\Big[\frac{1}{x(x+1)}\Big]_{x=1}=\frac{1}{2}\\
c&=\Big[(x+1)F(x)\Big]_{x=-1}=\Big[\frac{1}{x(x-1)}\Big]_{x=-1}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc

$$F(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}$$

2. Résolution de $x(x^2-1)y'+2y=x^2$.
Cette équation est bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}$. Cependant pour la résoudre il faut isoler y' :

$$y'(x)=-\frac{2}{x(x^2-1)}y(x)+\frac{x}{x^2-1}$$

On pose $a(x)=-\frac{2}{x(x^2-1)}$ et $b(x)=\frac{x}{x^2-1}$. Les fonctions a et b sont continues simultanément sur les intervalles $I_1=]-\infty,-1[$, $I_2=]-1,0[$, $I_3=]0,1[$ et $I_4=]1,+\infty[$ donc on résoud l'équation différentielle sur chaque intervalle puis on cherchera une solution maximale sur $\mathbb{R}$ si elle existe.
Une primitive de a est

$$A(x)=\int-\frac{2}{x(x^2-1)}\,dx=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{(x+1)}\right)dx=\ln x^2-\ln|x-1|-\ln|x+1|==\ln\frac{x^2}{|x^2-1|}.$$

La forme générale des solutions de l'équation homogène est , sur chaque intervalle,

$$\boxed{y_h(x)=\begin{cases}C_1e^{\ln\frac{x^2}{|x^2-1|}}=C_1\frac{x^2}{|x^2-1|}=C_1\frac{x^2}{(x^2-1)}, & \text{si } x\in I_1=]-\infty,-1[\\ C_2\frac{x^2}{|x^2-1|}=-C_2\frac{x^2}{(x^2-1)}=\widetilde{C}_2\frac{x^2}{(x^2-1)}, & \text{si } x\in I_2=]-1,0[\\ C_3\frac{x^2}{|x^2-1|}=-C_3\frac{x^2}{(x^2-1)}=\widetilde{C}_3\frac{x^2}{(x^2-1)}, & \text{si } x\in I_3=]0,1[\\ C_4\frac{x^2}{|x^2-1|}=C_4\frac{x^2}{(x^2-1)}, & \text{si } x\in I_4=]1,+\infty[\end{cases}}\quad,\qquad \begin{array}{c}C_1,C_2,C_3,C_4\in\mathbb{R}\\ \text{et } \widetilde{C}_2=-C_2,\widetilde{C}_3=-C_3.\end{array}$$

On fait varier la constante pour déterminer une solution particulière : on pose $y_p(x)=\varphi(x)\frac{x^2}{(x^2-1)}$. On calcule la dérivée

$$y_p'(x)=\varphi'(x)\frac{x^2}{(x^2-1)}-\varphi(x)\frac{2x}{(x^2-1)^2}.$$

On obtient, pour $x\in I_1$ ou $x\in I_2$ ou $x\in I_3$ ou $x\in I_4$

$$\begin{aligned}
x(x^2-1)y_p'(x)+2y_p(x)=x^2\quad&\Leftrightarrow\quad x(x^2-1)\left(\varphi'(x)\frac{x^2}{(x^2-1)}-\varphi(x)\frac{2x}{(x^2-1)^2}\right)+2\varphi(x)\frac{x^2}{(x^2-1)}=x^2\\
&\Leftrightarrow\quad\left(\varphi'(x)x^3-\varphi(x)\frac{2x^2}{(x^2-1)}\right)+2\varphi(x)\frac{x^2}{(x^2-1)}=x^2\\
&\Leftrightarrow\quad\varphi'(x)x^3=x^2\\
&\Leftrightarrow\quad\varphi'(x)=\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Une primitive est donc $\varphi(x) = \ln|x|$ et une solution particulière est $y_p(x) = \frac{x^2}{(x^2-1)} \ln|x|$.
Finalement, la forme générale des solutions de l'équation avec second membre est donc

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{(x^2-1)}(C_1 + \ln|x|), & \text{si } x \in I_1 =]-\infty, -1[\\ \frac{x^2}{(x^2-1)}(\widetilde{C}_2 + \ln|x|), & \text{si } x \in I_2 =]-1, 0[\\ \frac{x^2}{(x^2-1)}(\widetilde{C}_3 + \ln x), & \text{si } x \in I_3 =]0, 1[\\ \frac{x^2}{(x^2-1)}(C_4 + \ln x), & \text{si } x \in I_4 =]1, +\infty[\end{cases}}, \quad C_1, \widetilde{C}_2, \widetilde{C}_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 7 – Exercice A.2.35

1. En posant $y_p(x) = ax$ dans (E), on obtient

$$a - a - a^2x^2 = -9x^2 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm 3.$$

Comme $a > 0$, il reste $a = 3$. Une solution particulière est $y_p(x) = 3x$.

2. On pose $y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}$ dans E : on calcule y'

$$y'(x) = 3 + \frac{z'(x)}{(z(x))^2}$$

et on susbtitue ces expressions dans (E)

$$\begin{aligned} 3 + \frac{z'(x)}{(z(x))^2} - \left(3 - \frac{1}{xz(x)}\right) - \left(3x - \frac{1}{z(x)}\right)^2 = -9x^2 \Leftrightarrow & \quad \frac{z'(x)}{(z(x))^2} + \frac{1}{xz(x)} - 9x^2 + \frac{6x}{z(x)} - \frac{1}{(z(x))^2} = -9x^2 \\ \Leftrightarrow & \quad \frac{z'(x) - 1}{(z(x))^2} + \frac{1}{z(x)}\left(6x + \frac{1}{x}\right) = 0 \end{aligned}$$

On multiplie par $(z(x))^2$ et on obtient une équation différentielle linéaire du 1er ordre

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1$$

3. On isole z' : $\boxed{z' = -\left(6x + \frac{1}{x}\right) z + 1}$.

$$a(x) = -\left(6x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow A(x) = -3x^2 - \ln x \Rightarrow \boxed{z_h(x) = C\frac{e^{-3x^2}}{x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $z_p(x) = \varphi(x)\frac{e^{-3x^2}}{x}$ donc

$$\varphi'(x) = xe^{3x^2} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{6}e^{3x^2}$$

D'où $\boxed{z_p(x) = \frac{1}{6x}}$.
Finalement,

$$z = z_h + z_p \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = 3x - \frac{1}{C\frac{e^{-3x^2}}{x} + \frac{1}{6x}} = 3x - \frac{x}{Ce^{3x^2} + \frac{1}{6}}}.$$

Chapitre 7 – Exercice A.2.36

On peut mettre l'équation sous la même forme qu'à l'exercice A.2.35, soit

$$(E) \qquad y'(x) + \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$$

1. On pose $y_p(x) = \frac{1}{x}$, alors $y_p'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et

$$y_p'(x) + \frac{y_p(x)}{x} - y_p^2(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

La fonction y_p est bien une solution particulère de (E).

2. On pose $y(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{z(x)}$ et on cherche l'équation différentielle dont z est solution :

$$\begin{aligned}
y'(x) + \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{z'(x)}{z^2(x)} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xz(x)} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z(x)}\right)^2 &= -\frac{1}{x^2} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{z'(x)}{z^2(x)} - \frac{1}{xz(x)} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz(x)} - \frac{1}{z^2(x)} &= -\frac{1}{x^2} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{z'(x) - 1}{z^2(x)} + \frac{1}{xz(x)} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \boxed{z'(x) = -\frac{1}{x} z(x) + 1}&.
\end{aligned}$$

3. On trouve $z_h(x) = \frac{C}{x}$ et $z_p(x) = \frac{x}{2}$. Finalement

$$z = z_h + z_p \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{C}{x} + \frac{x}{2}} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{\widetilde{C} - x^2}, \text{ avec } \widetilde{C} = -2C \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 7 – Exercice A.2.31

2. On doit utiliser le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ donc $x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$. $\boxed{\text{Calcul de } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx.}$

On a

$$x = 0 \Leftrightarrow t = 0 \qquad \text{et} \qquad x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{1-t^2}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt \\
&= \Big[-\ln|1-t| + \ln|1+t|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \ln\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)}\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \ln(2+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Calcul de } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx.}$ On a

$$x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln t\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = 0 - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Calcul de } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}\,dx.}$ On a

$$x = 0 \Leftrightarrow t = 0 \qquad \text{et} \qquad x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

$$2 + \cos x = 2 + \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2(1+\tan^2\frac{x}{2}) + 1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{3+\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}\,dx &= \int_0^1 \frac{1+t^2}{3+t^2}\frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,dt \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}\,dt
\end{aligned}$$

Nouveau changement de variable : $u = \frac{t}{\sqrt{3}} \Rightarrow dt = \sqrt{3}\,du$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}\,dx &= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+u^2}\sqrt{3}\,du \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\arctan u\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}
\end{aligned}$$