Chapitre 1 - Expression mathématique

I Vocabulaire

1. Une **définition** est une phrase qui donne la signification d'un mot, d'un symbole.
   exemple : Soit x un réel. La *valeur absolue* de x, notée $|x|$, est le plus grand nombre entre x et $-x$.

2. Une **proposition** est une phrase qui énonce une propriété *vraie* ou *fausse*. Toute proposition mathématique possède une **valeur de vérité** (ou valeur logique) qui est $\boxed{VRAI}$ ou $\boxed{FAUX}$.
   exemple : (i) il existe un entier supérieur à 2^{100} . . .
   (ii) 1 est une racine de $7x^2 - 8x + 33$ . . .
   (iii) si $n \in \mathbb{Z}$ alors $18n^2 - 15n + 2$ est un entier positif . . .

3. On dit qu'on **démontre** une proposition quand on montre qu'elle est vraie.

4. Un **théorème** est une proposition qui peut être démontrée au travers d'un raisonnement logique construit à partir d'autres propositions.

5. Un **axiome** est une proposition considérée comme vraie sans démonstration.
   exemple géométrique : « par deux points, il passe une et une seule droite ».

6. Un **corollaire** est une conséquence direct d'un théorème.

II Opérations logiques sur les propositions

Les propositions sont souvent construites à partir d'autres propositions à l'aide de connecteurs logiques.

Definition

Deux propositions P et Q sont dites **équivalentes** si elles ont la même valeur de vérité. On note alors $\boxed{P \Leftrightarrow Q}$.

Exemples. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, (i) $x^2 - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-1, 1[\,;$ $\qquad (ii)$ $2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$

Definition

La **négation** d'une proposition P, notée $\boxed{\text{non } P}$ ou $\boxed{\neg P}$, est la proposition qui est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.

Remarque. les propositions $\text{non}(\text{non } P)$ et P on la même valeur logique donc $\boxed{\text{non}(\text{non } P) \Leftrightarrow P}$.

Definition

La **disjonction** de deux propositions P et Q est la phrase, notée $\boxed{P \text{ ou } Q}$, qui est vraie lorsque P est vraie ou Q est vraie, et fausse sinon.

$\longrightarrow$ Table de vérité *à faire en cours*

Exemples. (i) Un entier naturel est pair ou impair $\quad \ldots;$ $\qquad (ii)$ $2 \leqslant 2 \quad \ldots$
(iii) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \cup [0, 1] \quad \ldots$

Remarques : (i) La proposition $\boxed{P \text{ ou } (\text{ non } P)}$ est toujours vraie. Il s'agit d'une tautologie.
(ii) La disjonction est associative : $(P_1 \text{ ou } P_2) \text{ ou } P_3 \quad \Leftrightarrow \quad P_1 \text{ ou } (P_2 \text{ ou } P_3)$
(iii) La disjonction est commutative : $P_1 \text{ ou } P_2 \quad \Leftrightarrow \quad P_2 \text{ ou } P_1$

Definition

La **conjonction** de deux propositions P et Q est la phrase, notée $\boxed{P \text{ et } Q}$, qui est vraie lorsque P est vraie et Q est vraie et fausse sinon.

$\longrightarrow$ Table de vérité *en cours*

Exemples. (i) Un carré est un rectangle et un losange ... ; (ii) $x + 1 = 0$ et $2x = 0$ ...
(iii) $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ...

Remarques : (i) La proposition $\boxed{P \text{ et } (\text{ non } P)}$ est toujours fausse. Il s'agit d'une absurdité.
(ii) La **conjonction** est également associative et commutative.

Propriété(s) (règle de distributivité)

1. $(P \text{ et } Q) \text{ ou } R \quad \Leftrightarrow \quad (P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)$
2. $(P \text{ ou } Q) \text{ et } R \quad \Leftrightarrow \quad (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$
3. $\text{non } (P \text{ ou } Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{ non } P) \text{ et } (\text{ non } Q)$
4. $\text{non } (P \text{ et } Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{ non } P) \text{ ou } (\text{ non } Q)$

Preuve du 1 *(en cours)*

Exemples : (i) non $(x = 2$ ou $x \neq 3)$ $\Leftrightarrow$ ...
(ii) non $(x > 2$ et $x \leqslant 3)$ $\Leftrightarrow$ ...

Remarque : En pratique, on évite de dresser les tables de vérités pour démontrer les équivalences. On utilise plutôt les propriétés 1 et 2.

Exercice. Montrer que $(P$ ou $($non $Q))$ et $Q \Leftrightarrow (P$ et $Q)$
Correction. *en cours*

$$\vdots$$

Definition

L'implication de Q par P, notée $\boxed{P \Rightarrow Q}$, est vraie si P est fausse ou $(P$ et $Q)$ sont vraies.

Propriété(s)

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow$ *(non P) ou Q.*

Preuve. *(en cours)*

$$\vdots$$

Remarque : En pratique, pour démontrer que $P \Rightarrow Q$, on montre que si P est vraie alors Q est vraie.

Vocabulaires. Écrire sous forme d'implication les phrases suivantes :
(i) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n^2 est pair alors n est pair $\Leftrightarrow$ ...
(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre $\sqrt{x+1}$ existe si $x \geqslant -1$ $\Leftrightarrow$ ...
(iii) Il suffit d'être une fonction dérivable pour être une fonction continue $\Leftrightarrow$ ...
(iv) Un carré ABCD est nécessairement un rectangle $\Leftrightarrow$ ...

Remarques. Dans l'implication $\boxed{P \Rightarrow Q}$, on dit que Q est une condition nécessaire pour avoir P, et que P est une condition suffisante pour démontrer Q.

Propriété(s)

1. *Transitivité de l'implication :* $\Big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\Big) \quad \Rightarrow \quad (P \Rightarrow R)$
2. *Négation de l'implication :* $\text{non } (P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ et } (\text{ non } Q)$

Preuve du 2. *(en cours)*

Definition

1. La **réciproque** de l'implication $\boxed{P \Rightarrow Q}$ est la proposition $\boxed{Q \Rightarrow P}$.
2. La **contraposée** de l'implication $\boxed{P \Rightarrow Q}$ est la proposition $\boxed{(\text{ non } Q) \Rightarrow (\text{ non } P)}$.

Propriété(s)

1. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$
   (pour démontrer une équivalence on démontre deux implications).
2. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{ non } Q \Rightarrow \text{ non } P)$.
   (pour démontrer une implication on peut démontrer sa contraposée).

III Les formes de raisonnement mathématiques

$\boxed{A}$ Raisonnement par récurrence.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Supposons qu'une proposition $P(n)$ est définie pour tout $n \geqslant n_0$.

Principe de récurrence.
- **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Pour tout $n \geqslant n_0$, l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : Pour tout $n \geqslant n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie.

Exercice. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$.

Correction. *en cours*

$\vdots$