Chapitre 6 - Formules de Taylor et développements limités

Introduction

Objectif : déterminer une valeur approchée de $f(x)$ **au voisinage de** $a \in D_f$ connaissant

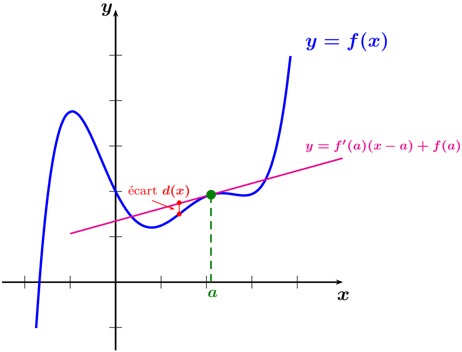
$$f(a)\ ,\ f'(a)\ ,\ f''(a)\ ,\ \dots,\ f^{(n)}(a)\ ,\ \dots$$

Introduction

Objectif : déterminer une valeur approchée de $f(x)$ **au voisinage de** $a \in D_f$ connaissant

$$f(a)\ ,\ f'(a)\ ,\ f''(a)\ ,\ \dots,\ f^{(n)}(a)\ ,\ \dots$$

Exemple connu : $f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$ quand $x \to a$

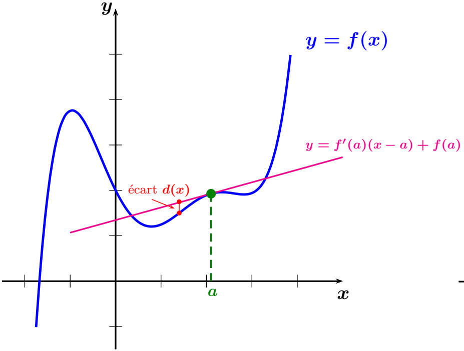


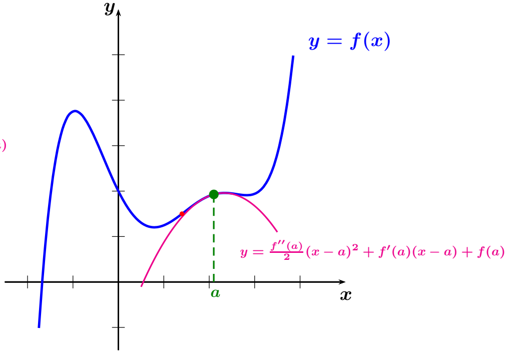
Introduction

Objectif : déterminer une valeur approchée de $f(x)$ **au voisinage de** $a \in D_f$ connaissant

$$f(a)\ ,\ f'(a)\ ,\ f''(a)\ ,\ \dots\ ,\ f^{(n)}(a)\ ,\ \dots$$

Exemple connu : $f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$ quand $x \to a$



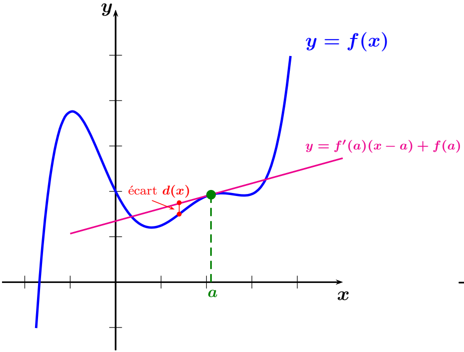


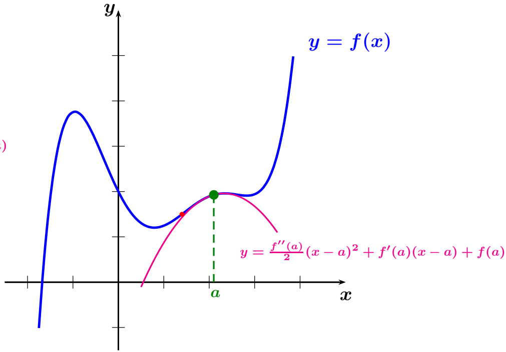
Introduction

Objectif : déterminer une valeur approchée de $f(x)$ **au voisinage de** $a \in D_f$ connaissant

$$f(a)\ ,\ f'(a)\ ,\ f''(a)\ ,\ \dots,\ f^{(n)}(a)\ ,\ \dots$$

Exemple connu : $f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$ quand $x \to a$





on a $d(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, plus précisément :

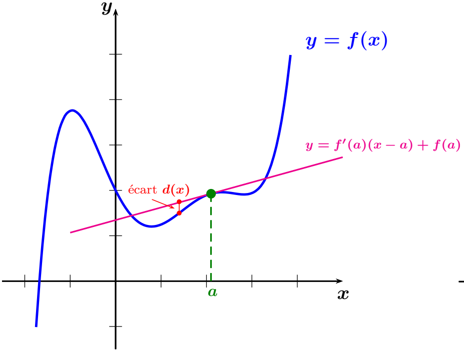
$d(x) = (x-a)\varepsilon(x-a)$ et $\varepsilon(x-a) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$:

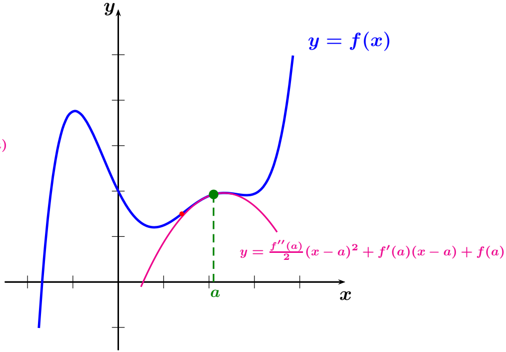
Introduction

Objectif : déterminer une valeur approchée de $f(x)$ **au voisinage de** $a \in D_f$ connaissant

$$f(a)\ ,\ f'(a)\ ,\ f''(a)\ ,\ \ldots,\ f^{(n)}(a)\ ,\ \ldots$$

Exemple connu : $f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$ quand $x \to a$





on a $d(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, plus précisément :

$d(x) = (x-a)\varepsilon(x-a)$ et $\varepsilon(x-a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$:

$d(x) = (x-a)^2\varepsilon(x-a)$ et $\varepsilon(x-a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

I Les formules de Taylor

Rappel : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et en particulier $0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \ldots$

Exemple : Considérons le polynôme $P(x) = x^3 + 4x^2 - x + 7$. Calculons $P(0), P'(0), \ldots$
Que remarque-t-on ?

Correction.

$$\vdots$$

Proposition

Soit P une fonction polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ de la forme

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Alors les coefficients vérifient $a_k = \qquad$, pour $k = 0, \ldots, n$.

preuve : *en cours*

$$\vdots$$

Proposition (Formule de Taylor pour les polynômes)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Toute fonction polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire

$$P(x) = \frac{P(a)}{0!} + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Exemple : Reprenons le polynôme $P(x) = x^3 + 4x^2 - x + 7$ avec $a = 1$.

Vérifions que $P(x) = P(1) + P'(1)(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{P^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3$.

Correction. *en cours*

$$\vdots$$

Theorem (formule de Taylor-Lagrange)

Soit f une fonction ***$n+1$ fois dérivable*** *sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. Alors quel que soit $x \in I$, il existe un $\theta \in]0,1[$, tel que :*

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)}_{=P_n(x-a)} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)).$$

preuve. *dans le cas $n = 2$.*
hypothèse : f est 3 fois dérivable sur un intervalle I.
but : Pour a et x fixés, déterminer $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - P_2(x-a) - C(x-a)^3 = 0$
dém :

$$\vdots$$

Theorem (formule de Taylor-Young)

*Soit f une fonction **de classe $\mathscr{C}^n$**, $n \in \mathbb{N}$, sur un intervalle I. Alors il existe une fonction ε telle que*

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x-a) \text{ et } \varepsilon(x-a) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

Autre écriture : on peut poser $h = x - a \Leftrightarrow x = a + h$. La formule devient

$$\forall x = a + h \in I,\ f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n \varepsilon(h) \text{ et } \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

preuve : *c'est un corollaire de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $(n-1)$.*

$$\vdots$$

⚠ Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Les restes d'ordre strictement inférieure à n sont non nuls.
Exemple. Le développement de T-Y à l'ordre 2 de $P(x) = x^3 + 4x^2 - x + 7$ avec $a = 1$ est

$$P(x) = \ldots$$

II Développements de Taylor-Young usuels en $a = 0$

$\boxed{A}$ Fonction exponentielle :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

La fonction f est infiniment continûment dérivable (de classe $\mathscr{C}^\infty$).

On peut donc appliquer la formule de Taylor-Young à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a = 0$.

Ainsi il existe une fonction ε telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Or $\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$ et

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)}$$

$\boxed{B}$ Fonction logarithme népérien :

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

La fonction f est infiniment continûment dérivable (de classe $\mathscr{C}^\infty$).

On peut donc appliquer la formule de Taylor-Young à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a = 0$.

Ainsi il existe une fonction ε telle que $\forall x > -1$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Or, $\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{1+x} \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f''(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \\ f^{(3)}(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{cases} f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \\ f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \end{cases}$

et

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)}$$