Chapitre 7 - Intégrale simple et primitive

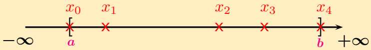
I Définition de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{A}$ Intégrale d'une fonction étagée

Definition (subdivision)

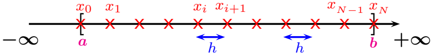
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $(a < b)$, et $N \in \mathbb{N}^*$. On peut découper cet intervalle en N sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, \dots, N-1$ tels que $[a, b] = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{N-1} [x_i, x_{i+1}]$ et

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$



L'ensemble $\{x_0; x_1; \dots; x_N\}$ est appelé **subdivision** de $[a, b]$ et card $\{x_0; x_1; \dots; x_N\} = N + 1$.

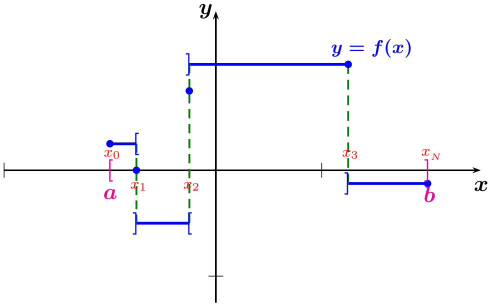
Cas particulier : on utilisera le plus souvent une **subdivision régulière** à $N + 1$ points de pas $\boxed{x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{N}}$. Ainsi, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $\cdots$, $x_i = a + ih$, $\cdots$ et $x_N = a + Nh = b$.



Definition (fonction étagée)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que ***f* est étagée** s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision à $N + 1$ points $\{x_0; x_1; \ldots; x_N\}$ tels que ***f* est constante sur** chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ pour $i = 0, \ldots, N - 1$.

Exemple :



f n'est pas nécessairement continue aux points de la subdivision x_i, mais admet des limites à gauche et à droite de x_i.

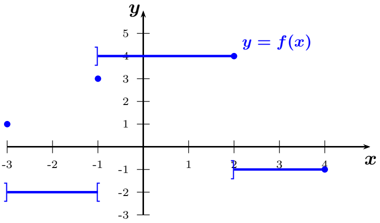
Definition (intégrale d'une fonction étagée)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction étagée sur la subdivision $\{x_0; x_1; \ldots; x_N\}$. Si

$$\forall\, i = 0, \ldots, N-1\,, \quad \exists\, \alpha_i \in \mathbb{R}\,, \quad \forall\, x \in\,]x_i, x_{i+1}[,\ f(x) = \alpha_i$$

alors on définit **l'intégrale de f sur $[a,b]$** par la formule $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (x_{i+1} - x_i)}$.

Exemple :



$x_0 = -3, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2$ et $\quad x_3 = 4.$

- sur $]x_0, x_1[$, on a $f(x) = -2$
- sur $]x_1, x_2[$, on a $f(x) = 4$
- sur $]x_2, x_3[$, on a $f(x) = -1$

$$\int_{-3}^{4} f(t)\,dt =$$

$\boxed{B}$ Intégrale de Riemann

Definition (fonction intégrable)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application **bornée**. On dit que ***f* est intégrable** si

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^*$ et 2 fonctions étagées u_N et U_N sur une subdivision $\{x_0; x_1; \ldots; x_N\}$, tels que

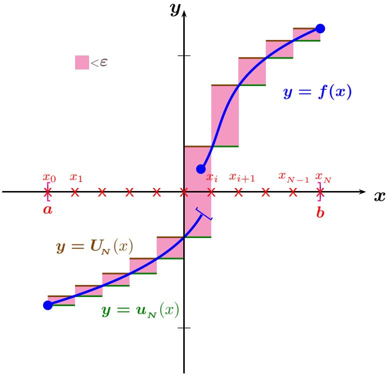
$$\forall\, i = 0, \ldots, N-1\,, \quad \forall\, x \in]x_i, x_{i+1}[, \quad u_N(x) \leqslant f(x) \leqslant U_N(x) \text{ et } \int_a^b (U_N(t) - u_N(t))\, dt < \varepsilon.$$

Theorem

Toute application définie et monotone sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$

preuve. *en cours*

Démonstration : dans le cas f croissante.



Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{b-a}{N}$.
Pour $i = 0, \dots, N-1$, soit $x_i = a + ih$.
Sur $]x_i, x_{i+1}[$, on pose $u_N(x) = f(x_i)$ et $U_N(x) = f(x_{i+1})$.

- On a bien $u_N(x) \leqslant f(x) \leqslant U_N(x)$ sur $]x_i, x_{i+1}[$

On a $\displaystyle\int_a^b u_N(t)\,dt = \sum_{i=0}^{N-1} hf(x_i)$ et $\displaystyle\int_a^b U_N(t)\,dt = \sum_{i=0}^{N-1} hf(x_{i+1})$

- On étudie la différence :

$$\int_a^b (U_N(t) - u_N(t))\,dt = h[f(x_N) - f(x_0)] = h[f(b) - f(a)].$$

- Il reste à montrer que $\forall\, \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,\ h[f(b) - f(a)] < \varepsilon$ (cf chapitre 3) :

Soit $\varepsilon > 0$. On résout, $\quad h[f(b) - f(a)] < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{b-a}{N}[f(b) - f(a)] < \varepsilon \Leftrightarrow N > \frac{b-a}{\varepsilon}[f(b) - f(a)]$

On pose $N = E(\frac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{\varepsilon}) + 1 > 0$. On a bien trouvé $N \in \mathbb{N}^*$, tel que $\displaystyle\int_a^b (U_N(t) - u_N(t))\,dt < \varepsilon$.

Proposition

Soit f une application intégrable sur $[a,b]$. On note

$$A := \left\{\alpha = \int_a^b u(t)\,dt;\ \ u \text{ est étagée et } u \leqslant f\right\} \text{ et } B := \left\{\beta = \int_a^b U(t)\,dt;\ \ U \text{ est étagée et } f \leqslant U\right\}.$$

Alors A admet une borne supérieure et B admet une borne inférieure. De plus, $\sup\ A = \inf\ B$.

preuve : • On montre que $\sup A$ et $\inf B$ existent.

• On montre que $\sup A \leqslant \inf B$ avec chap 2, ex A.2.10.

• On montre que $\inf B - \sup A = 0$ avec chap 4, ex A.2.10.

Definition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application intégrable. Alors, on définit **l'intégrale de f sur $[a,b]$** par

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sup\ A = \inf\ B.$$