Exercice 2 : Soient
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$
des applications.

Démontrer l'implication $\boxed{f \text{ et } g \text{ injectives} \quad \Rightarrow \quad g \circ f \text{ injective}}$.

Correction. *en cours*

$\vdots$

Exercice 3 : (a) A-t-on $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective ?
(b) A-t-on $g \circ f$ injective $\Rightarrow g$ injective ?

Correction. *en cours*

$\vdots$

II Applications réciproques

Definition

Soit f une application de E dans F. On dit que l'application **g**, définie de F dans E, est l'**application réciproque de f** si les deux égalités suivantes sont satisfaites :

$$\boxed{f \circ g = id_F \quad \text{et} \quad g \circ f = id_E}.$$

(Autrement dit, $\forall x \in E,\ g(f(x)) = x$ et $\forall y \in F,\ f(g(y)) = y$.)

Exemple : étudier la fonction inverse.

Proposition

*Soit $f : E \to F$ une application. Si f admet une **application réciproque** g, alors g **est unique** et on note $g = f^{-1}$.*

Preuve. *en cours*

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application. Alors $\boxed{f \text{ admet une application réciproque} \Leftrightarrow f \text{ est bijective}}$.

Preuve. *en cours*

Proposition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Si f admet une application réciproque f^{-1} alors f^{-1} est bijective.

Preuve. *en cours*

$$\vdots$$

Proposition

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications bijectives.
Alors la composée $g \circ f$ est une application bijective et $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$.

Preuve. *en cours*

$$\vdots$$

La réciproque « $g \circ f$ bijective $\Rightarrow f$ et g bijectives » **est fausse**.
Contre-exemple : *voir Ex 3/ b/.*

Exercice de cours de la section A.1

Pour une meilleure compréhension du cours, vous pouvez faire les exercices suivants :

- A.1.1 (juste f_3), A.1.6 et A.1.11, A.1.8 et A.1.12 sur les applications.

- A.1.20, A.1.22, A.1.23, A.1.24, A.1.25 sur les majorants/+grand élément/sup etc...

Ces exercices sont à faire en dehors des TDs et avant les 3h de TDs qui suivent ce cours.