

Definition

- ① Une suite (u_n) est dite **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ (ou $u_{n+1} - u_n \geq 0$).
- ② Une suite (u_n) est dite **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$ (ou $u_{n+1} - u_n \leq 0$).
- ③ Une suite est dite **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.
- ④ Une suite est dite **strictement monotone** si l'inégalité est démontrée au *sens stricte*.

Theorem (Convergence des suites monotones)

- ① Toute suite (u_n) **croissante et majorée** est convergente vers une limite ℓ . De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$.
- ② De même, toute suite (u_n) **décroissante et minorée** est convergente vers une limite ℓ .
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \ell$.

preuve du ①. en cours

Exercice : Soit (u_n) , la suite récurrente définie pour $n \in \mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Montrer que (u_n) converge.

Correction. en cours

II Opérations sur les suites convergentes

Theorem (de comparaison)

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. Alors, $\ell \leq \ell'$ (**th. de comparaison des limites**).
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Soit (w_n) une autre suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq w_n \leq v_n$.
Alors $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ également (**th. des gendarmes**).

Corollary (du th. des gendarmes)

- Soit (v_n) une suite convergeant vers 0 et soit (u_n) une autre suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq v_n$.
Alors, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ également (**corollaire 1**).
- Soit (u_n) une suite bornée et soit (v_n) une autre suite convergeant vers 0.
Alors $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ également (**corollaire 2**).

preuve. en cours

On montre que le th. des gendarmes \Rightarrow ① \Rightarrow ②.

Exemple : Montrer, suivant différents raisonnements, que la suite de terme général $(u_n = \frac{\sin n}{n})_{n \geq 1}$ converge.

Correction. en cours

Theorem (somme/produit/quotient)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes avec $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell'$. Alors,

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \text{ (somme)} & u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell + \ell' \quad \textcircled{2} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda \ell \\ \textcircled{3} \text{ (produit)} & u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \ell' \quad \textcircled{4} \text{ (quotient)} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0 \text{ et } \ell' \neq 0) \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\ell}{\ell'}. \end{array}$$

preuve du $\textcircled{3}$. en cours

III Suites particulières

A Suites adjacentes

Theorem (et définition)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant

- (i) (u_n) est croissante
- (ii) (v_n) est décroissante
- (iii) $v_n - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Alors les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que (u_n) et (v_n) sont deux **suites adjacentes**.

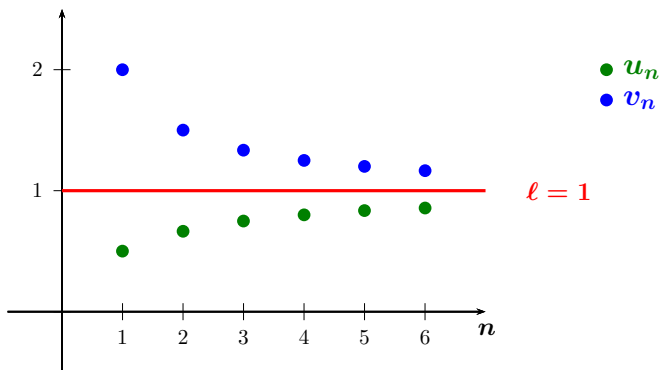
preuve. en cours

Remarque. Ce théorème permet de démontrer que deux suites convergent sans connaître leurs limites.

Exercice : Soit (u_n) et (v_n) , deux suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{n}{n+1}$ et $v_n = \frac{n+1}{n}$.
Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

Correction. *en cours*

Ci-dessous la répartition des termes des deux suites (u_n) et (v_n) .



Tout couple de suites adjacentes se comporte ainsi.