Theorem (Caractérisation séquentielle d'une limite finie)

Soit Ω un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ une application.

$$\left(\exists! \ell \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to a} f(x) = \ell\right) \Leftrightarrow \left(\exists! \ell \in \mathbb{R},\ \forall\,(x_n),\ \begin{cases} x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \in \Omega\backslash\{a\} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell.\right)$$

preuve de $(\Rightarrow)$. *en cours*

Application : **Ce théorème est souvent utilisé pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite $\ell \in \mathbb{R}$ en utilisant la contraposée :**

$$\exists\,(x_n),\ \begin{cases} x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \in \Omega\backslash\{a\} \end{cases} \text{ et } \big(f(x_n)\big) \textbf{ est une suite divergente} \quad \Rightarrow \quad f \textbf{ n'admet pas de limite en } a$$

Exemple : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.
Montrons que cette fonction n'admet pas de limite en $a = 0$.

Correction : *en cours*

II Propriétés et opérations sur les limites

Theorem

Soit Ω un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \Omega$ et f_1, f_2 et f des applications définies sur $\Omega \backslash \{a\}$.

1. ***(de comparaison des limites)** On suppose $\exists\, \ell_1 \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \ell_1$ et $\exists\, \ell_2 \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = \ell_2$.*
   Alors $\big(\forall\, x \in \Omega \backslash \{a\},\ f_1(x) \leqslant f_2(x)\big) \Rightarrow \quad \ell_1 \leqslant \ell_2$.
2. ***(des gendarmes)** On suppose $\exists\, \ell \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \ell = \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$.*
   Alors $\big(\forall\, x \in \Omega \backslash \{a\},\ f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)\big) \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Corollary

1. ***(corollaire 1)** On suppose $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ et $\forall x \in \Omega \backslash \{a\},\ |f(x)| \leqslant g(x)$. Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.*
2. ***(corollaire 2)** On suppose que $\mathrm{Im} f$ est borné et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Alors $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} f(x) g(x) = 0}$.*

Remarque. Ces théorèmes sont valables pour les limites finies à gauche, à droite d'un point a et pour les limites finies quand x tend $\pm\infty$.

Exemple 1 : Montrons que $x \sin \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Correction. *en cours*

Theorem (somme/produit/quotient)

Soit Ω un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \Omega$ et f et g des applications définies sur $\Omega\setminus\{a\}$.
On suppose $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\exists\, \ell' \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$.

① ***(somme)*** $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = \ell + \ell'$ ② $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda\ell$

③ ***(produit)*** $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \ell\ell'$ ④ ***(quotient)*** $\begin{cases} \forall x \in \Omega\setminus\{a\},\ g(x) \neq 0 \\ \ell' \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}$.

Remarque. Ce théorème est valable pour les limites finies à gauche, à droite d'un point a et pour les limites finies quand x tend $\pm\infty$.

Exemple 1 : Montrons que $\frac{1-\cos x}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

Correction. *en cours*

Theorem (composition)

Soit Ω un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \Omega$, f une application définie sur $\Omega\setminus\{a\}$.
Soit g une application définie au voisinage de $b \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$⑤ \left(\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b} g(x) = \ell\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} g\circ f(x) = \ell.$$

Exemple 2 : Montrons que $\frac{\sin^2(3x)}{1-\cos(2x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{9}{2}$.

Correction. *en cours*

Exercice : Montrons que $\frac{x}{\sin x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$.

Correction.

(i) Étape 1 : on démontre l'encadrement $\forall\, x \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\,,\ \cos x \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}$.
Jeter un œil au cercle trigonométrique fournit en complément sur la tangente, page 2.

(ii) Étape 2 : on utilise le résultat $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \lim\limits_{x \to 0} 1 - 2(\sin \frac{x}{2})^2$

Exercice de cours de la section A.1

Pour une meilleure compréhension du cours, vous pouvez faire les exercices suivants :

- Chapitre 4 : A.1.2
- Chapitre 4 : A.1.5
- Chapitre 4 : A.1.7
- Chapitre 4 : A.1.9

Ces exercices sont à faire en dehors des TDs et avant les 3h de TDs qui suivent ce cours.