II Extrema locaux

Definition (**Extremum local**)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $\boldsymbol{f : x \in D \mapsto f(x)}$ une application. Soit $x_0 \in D$.

① On dit que x_0 réalise un ***mimimum local*** de f sur D si $\exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D,\ f(x) \geqslant f(x_0)$.

② On dit que x_0 réalise un ***maximum local*** de f sur D si $\exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D,\ f(x) \leqslant f(x_0)$.

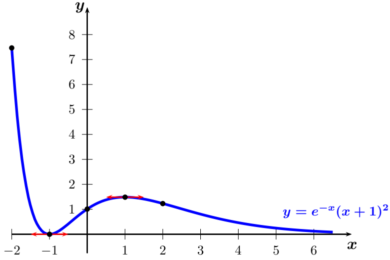
Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x}(x+1)^2$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	e^2	0	1	$4/e$	$9/e^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(x+1)^2 + 2e^{-x}(x+1) \\ &= e^{-x}\big[-(x+1)^2 + 2(x+1)\big] \\ &= e^{-x}[1-x^2] \\ &= e^{-x}(1-x)(x+1) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x}x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} e^{-x}x^2 = 0$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0



Question : f admet-elle un extremum global sur Ω ? un extremum local sur Ω ?

① sur $\Omega = \mathbb{R}$ ② sur $\Omega = [0, 2]$ ③ sur $\Omega =]0, 2[$

La nature de l'intervalle Ω influence les résultats !

Theorem (condition nécessaire d'optimalité locale)

Soit f une fonction dérivable sur un ***intervalle ouvert*** $\Omega =]a, b[$ *avec* $a < b$.
Si x^* réalise un minimum ou maximum local de f sur Ω alors $f'(x^*) = 0$.

preuve : dans le cas où x^* reéalise un minimum local.

hypothèse : f est dérivable en $x^* \Leftrightarrow \lim_{h\to 0+} \frac{f(x^*+h)-f(x^*)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x^*+h)-f(x^*)}{h} = f'(x^*)$.

but : on montre que $f'(x^*) \leqslant 0$ et $f'(x^*) \geqslant 0$.

dém :

Le théorème est faux si Ω n'est pas ouvert.
contre-exemple : cf l'exemple précédent avec $\Omega = [0, 2]$,

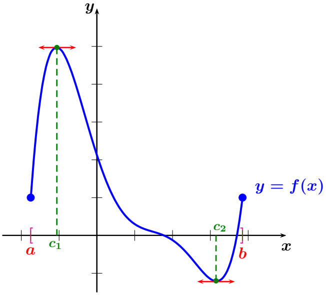
$$\vdots$$

La réciproque est fausse.
contre-exemple : $f(x) = x^3$ sur $\Omega = \mathbb{R}$ n'admet pas d'extrema locaux alors que $f'(0) = 0$.

III Formules des accroissements finis et applications

Theorem (théorème de Rolle)

Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivable sur $]a,b[$ tel que $f(a)=f(b)$. Alors, $\exists\, c \in]a,b[,\ f'(c)=0$.

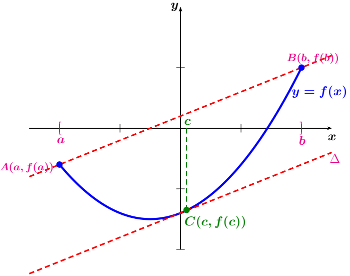


preuve :

Theorem (théorème des accroissements finis)

Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ $(a<b)$.
Alors $\exists\, c \in]a,b[,\ f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

preuve : on applique le théorème de Rolle à la fonction φ définie sur $[a,b]$ par $\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.



$\Delta : y = f'(c)(x-c)+f(c)$

$(AB) : y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

Les droites Δ et (AB) ont même coefficient directeur : elles sont parallèles.

A Caractérisation de la monotonie

Theorem (caractérisation de la monotonie)

Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors,

- *f est croissante sur $[a, b]$* $\Leftrightarrow$ $\forall x \in]a, b[\ ,\ f'(x) \geqslant 0$.

preuve : $(\Rightarrow)$ Hyp : f est dérivable sur $]a, b[$ et croissante sur $[a, b]$

$(\Leftarrow)$ Soit $(x_1, x_2) \in [a, b]^2$ tels que $x_1 < x_2$. On veut montrer que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Remarque : On a $\forall x \in]a, b[\ ,\ f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ est strictement croissante sur $[a, b]$

⚠ La réciproque est fausse !

contre-exemple : $f(x) = x^3$ est strictement monotone et pourtant $\exists\, x = 0 \in \mathbb{R}\ ,\ f'(x) = 0$.

Theorem (sous les mêmes hypothèses sur f ...)

- *f est décroissante sur $[a, b]$* $\Leftrightarrow$ $\forall x \in]a, b[\ ,\ f'(x) \leqslant 0$.
- *f est constante sur $[a, b]$* $\Leftrightarrow$ $\forall x \in]a, b[\ ,\ f'(x) = 0$.