$\boxed{C}$ Fonction cosinus :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x$.

La fonction f est infiniment continûment dérivable (de classe $\mathscr{C}^\infty$).

On peut donc appliquer la formule de Taylor-Young à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a = 0$.

Ainsi il existe une fonction ε telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Or $\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ et
$\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(2k+1)}(0) = 0$.

$$\boxed{\text{ordre } 2 :\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}$$

$$\boxed{\text{ordre } 3 :\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)}$$

$$\boxed{\text{ordre } 4 :\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)}$$

$\boxed{D}$ Fonction sinus :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

La fonction f est infiniment continûment dérivable (de classe $\mathscr{C}^\infty$).

On peut donc appliquer la formule de Taylor-Young à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a = 0$.

Ainsi il existe une fonction ε telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Or $\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(2k)}(0) = 0$ et
$\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$.

$$\boxed{\text{ordre 2 : } \sin x = x + x^2\varepsilon(x)}$$

$$\boxed{\text{ordre 3 : } \sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)}$$

$$\boxed{\text{ordre 4 : } \sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)}$$

$\boxed{E}$ Fonction inverse :

Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

La fonction f est infiniment continûment dérivable (de classe $\mathscr{C}^{\infty}$).

On peut donc appliquer la formule de Taylor-Young à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a = 0 \in I$.

Ainsi il existe une fonction ε telle que $\forall x < 1$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Or, $\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \\ f''(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4} \\ f^{(3)}(0) = 6 = 3! \end{cases} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{cases} f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \\ f^{(k)}(0) = k! \end{cases}$

et

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)}$$

NB : par changement de variable $t = -x$, on a $\forall\, t > -1$, $\boxed{\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-t)^n + t^n\varepsilon(t)}$

$\boxed{F}$ Fonction puissance (puissance non entière) :

Soit f la fonction définie sur $I =]-1, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

La fonction f est infiniment continûment dérivable (de classe $\mathscr{C}^{\infty}$).

On peut donc appliquer la formule de Taylor-Young à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a = 0 \in I$.

Ainsi il existe une fonction ε telle que $\forall x > -1$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Or,

$$\begin{cases} f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f'(0) = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ f''(0) = \alpha(\alpha-1) \end{cases} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{cases} f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \\ f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \end{cases}$$

et

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)}$$

Exemple classique : $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 3 en $a = 0$.

$$\begin{aligned} \forall x > -1, \ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x). \end{aligned}$$

III Les infiniments petits

Definition

On dit que la fonction f (ou que $f(x)$) est un **infiniment petit au voisinage de a** si $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = 0}$.

Remarque : si f est définie et continue en a, alors la condition devient $\boxed{f(a) = 0}$.

Exemples : • Soit $f(x) = (x-a)^n$. Alors f est un inf^t petit au vois. de $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow n \geqslant 1$.

• Soit $f(x) = \ln(1+x)$ et $a = 0$. Alors . . .

• Soit $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$ et $a = 0$. Alors . . .

• Soit $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ et $a = 0$. Alors . . .

• Soit $f(x) = \cos x$ et $a = \frac{\pi}{2}$. Alors . . .

• Soit $f(x) = e^x$ et $a \neq 0$. Alors . . .

Remarque : La définition s'étend au voisinage de $\pm\infty$.

Exemple : • Soit $f(x) = e^x$ en $-\infty$. Alors . . .

Definition

Soit f un infiniment petit au voisinage de a.

On dit que **$f(x)$ est d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$** s'il existe $\ell \neq 0$ tel que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^p} = \ell$.

Dans ce cas,

$$f(x) = \ell(x-a)^p + (x-a)^p \varepsilon(x-a) \quad \text{avec } \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Le terme $\ell(x-a)^p$ est appelé **partie principale de l'inf^{t} petit $f(x)$ au vois. de a**.

Exemple 1 : Soit $f(x) = 1 - \cos x$ et $g(x) = x^2$ au vois. de $a = 0$.

$$\vdots$$

Exemple 2 : Soit $f(x) = x(\ln x)^2$ et $a = 1$.

$$\vdots$$