

Lire le paragraphe 7.1.5

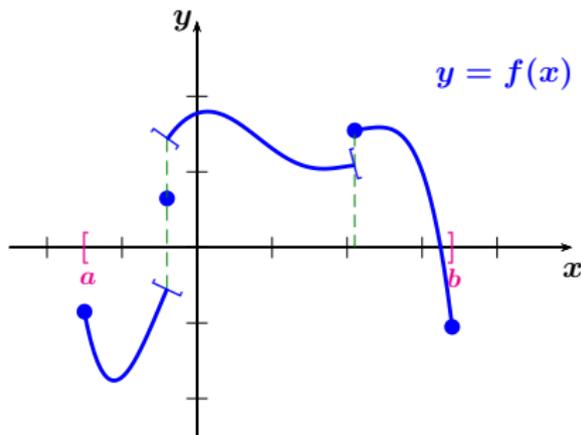
Conventions compatibles avec la relation de Chasles : $\int_a^a f(t) dt = 0$ et $\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$

C Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (admis)

- 1 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. **Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.**
- 2 Si f est bornée et continue par morceau sur $[a, b]$, càd continue sauf en un nombre fini de points où elle admet une limite à droite et une limite à gauche, **alors f est intégrable sur $[a, b]$.**

Exemple de fonction bornée continue par morceau :



Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$. On dit que F est **la primitive de f qui s'annule en a** .

NB : f continue $\Rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^1 .

preuve : On étudie le taux d'accroissement de F en chaque point $x \in I$.

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t) dt \Rightarrow \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

$h > 0$.

$h < 0$.

Corollary (forme générale des primitives)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives. Étant donnée une primitive particulière F de f , la forme générale des primitives est $G(x) := \int f(x) dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Deux primitives de f définies sur le même intervalle I diffèrent d'une constante.

preuve : On pose $H(x) = G(x) - F(x)$ sur I . On a $\forall x \in I$, $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc H est constante sur I .

Calcul intégral : Soit $(a, b) \in I^2$. Connaissant G une primitive de f définie sur I , en pratique, on effectue le calcul intégral en écrivant

$$\int_a^b f(t) dt = \left[G(x) \right]_a^b = G(b) - G(a).$$

⚠ Ne pas confondre : le réel $\int_a^b f(t) dt$, appelé intégrale de f sur $[a, b]$, avec la fonction $\int f(x) dx$, appelée forme générale des primitives de f .

Exemples. Donner la forme générale des primitives de $x \mapsto e^{ax+b}$, $\cos(ax + b)$, $\sin(ax + b)$, $\frac{1}{(ax+b)^n}$, $n \geq 1$.

Theorem (Intégration de DLs)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I admettant un DL à l'ordre n en $a \in I$, c'à d

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h), \quad \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Alors f admet une primitive F définie et dérivable sur I . De plus, F admet un DL à l'ordre $n+1$ en a , c'à d

$$F(a+h) = F(a) + \alpha_0 h + \frac{\alpha_1}{2} h^2 + \frac{\alpha_2}{3} h^3 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n+1} h^{n+1} + h^{n+1} \tilde{\varepsilon}(h), \quad \tilde{\varepsilon}(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Exemple : Déterminer le DL de $\text{Arctan } x$ à l'ordre 5 au voisinage de $a = 0$.

⋮

Exemple : Déterminer le DL de $F(x) = \int_2^x \frac{1}{1+t} dt$ à l'ordre $n = 5$ en $a = 0$.

⋮