III Suites particulières

$\boxed{B}$ Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère une fonction f définie sur un intervalle I. On définit une **suite récurrente** par la donnée d'un premier terme $\boxed{u_0 \in I}$ et de la relation de récurrence $\boxed{u_{n+1} = f(u_n)}$.

Definition

Soit $f : I \to I$ une application. On dit que $\ell \in I$ est un **point fixe** de f si l'égalité $\boxed{\ell = f(\ell)}$ est vérifiée.

Proposition (admise et démontrée au chapitre 4)

*Soit $f : I \to I$ une **application continue**. On considère une suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et la donnée d'un premier terme $u_0 \in I$. **Si la suite (u_n) converge alors sa limite ℓ est un point fixe de f**.*

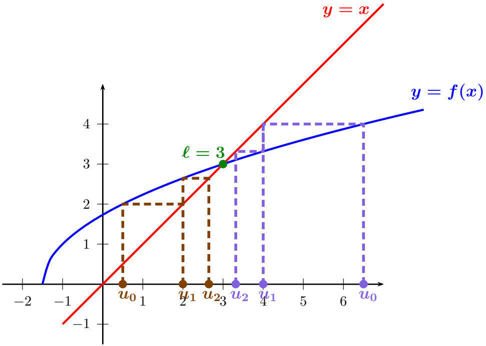
Justification partielle. *en cours*

L'étude d'une suite récurrente suit le schéma suivant :

1. Déterminer les points fixes possibles de f.
2. Représentation graphique : choisir u_0 de part et d'autre des points fixes de f
3. Observations et conjecture : observer tout ce qui peut être utile pour démontrer la convergence ou la divergence d'une suite (sens de variation, majorée/minorée, etc...)
4. Démonstration des conjectures à l'aide des théorèmes de convergence

Exemple : Avec $f(x) = \sqrt{2x+3}$ définie sur $I = [-\frac{3}{2}, +\infty[$, on construit une suite récurrente (u_n) en choisissant arbitrairement $u_0 \in I$, puis en calculant les termes successifs $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

1. Résolvons $\quad f(\ell) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$
2. Représentation graphique :



On a représenté ci-contre les premiers termes de *deux suites récurrentes* en choisissant pour la première $u_0 = \frac{1}{2}$, puis pour la seconde $u_0 = \frac{13}{2}$.

3. **Conjectures** : ...
4. *La démonstration des conjectures est laissée en exercice.*

C Les séries numériques

Definition

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle. On appelle **série de terme général u_n**, la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par

$$S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \, .$$

Lorsque $(S_n)_n$ converge, on note $S = \sum_{n\geqslant n_0} u_n$ sa limite.

Exemple. Soit $u_n = u_0 q^n$, $n \geqslant 0$. Alors

$$S_n = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \cdots + u_0 q^n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

ou bien

$$u_0 q^{n_0} + u_0 q^{n_0+1} + \cdots + u_0 q^n = u_0 q^{n_0} \frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q} = u_0 q^{n_0} \frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q}$$

La série géométrique converge ssi $|q| < 1$.

Proposition (CN de convergence)

$$\left(S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) \textit{converge} \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n+\infty}{\rightarrow} 0.$$

Preuve. *en cours*

⚠ La réciproque est fausse : $\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge. Étudier l'exercice A.1.24

Theorem (Opérations sur les séries convergentes)

Soient $\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)$ *et* $\left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k\right)$ *deux séries convergentes. Alors,*

1. *la série somme* $\left(\sum_{k=n_0}^{n} (u_k + v_k)\right)$ *converge et on a* $\sum_{k=n_0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} v_k$,
2. *si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors la série* $\left(\sum_{k=n_0}^{n} (\lambda u_k)\right)$ *converge et on a* $\sum_{k=n_0}^{\infty} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k$.

Theorem (Les séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ *fixé. On appelle* ***série de Riemann*** *réelle, les suites de sommes partielles définies comme suit*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. ***Critère 1.*** *Si* $\alpha > 1$ *alors* $(S_n)_{n \geqslant 1}$ *converge.*
2. ***Critère 2.*** *Si* $\alpha \leqslant 1$ *alors* $(S_n)_{n \geqslant 1}$ *diverge et tend vers* $+\infty$.

Preuve. *au chapitre 7*

Definition (Suites équivalentes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels non tous nuls à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.
On dit que (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Exemple 1. *Les polynômes sont équivalents à leur monôme de plus haut degré*

$$p \geqslant 1 \text{ et } a_p \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0 \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p.$$

Exemple 2. $\quad a > b \quad \Rightarrow \quad e^{an} + e^{bn} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{an}$

Theorem (Règles de Riemann)

*Soit (u_n) une suite de **terme général positif ou nul** et $S_n = u_{n_0} + \cdots + u_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.*

1. ***Critère 1.** S'il existe un réel $\lambda \geqslant 0$ et une puissance $\alpha > 1$ tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$ alors (S_n) converge.*
2. ***Critère 2.** S'il existe un réel $\lambda > 0$ et une puissance $\alpha \leqslant 1$ tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$ alors (S_n) diverge.*

Exercice. Étudier la convergence des séries de terme général $u_n = \sqrt{\frac{n+2\ln n}{n^3+1}}$ et $u'_n = \sqrt{\frac{1+2\ln n}{n^3+1}}$ avec $n \geqslant 1$.

Exercice de cours de la section A.1

Pour une meilleure compréhension du cours, vous pouvez faire les exercices suivants :

- A.1.18 (suites adjacentes)
- A.1.16 (recherche d'équivalents)
- A.1.17 (opérations interdites sur les équivalents)
- A.1.24 (série de Riemann divergente avec $\alpha = 1$)
- A.1.25 (étude de la convergence de séries numériques)

Ces exercices sont à faire en dehors des TDs et avant les 3h de TDs qui suivent ce cours.