III Les infiniments petits

Application au calcul de limites :
On remplace la fonction par sa partie principale pour lever l'indétermination de type $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Exemple 1. Déterminer la limite de $\dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x-e^x}$ quand $x \to 0$.

$$\vdots$$

Exemple 2. Déterminer la limite de $\dfrac{x(\ln x)^2}{x^3-x^2-x+1}$ quand $x \to 1$.

$$\vdots$$

IV Développement limité

Definition

Soit Ω un intervalle ouvert contenant a et f une fonction définie sur $\Omega\backslash\{a\}$.
On dit que f admet un **développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a** s'il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tels que

$$\forall x = a + h \in \Omega, \qquad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x-a)$$

$$\text{ou bien} \quad f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n + h^n\varepsilon(h) \quad \text{et } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple 1 : Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Exemple 2 : Tout fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I avec $a \in I$ admet un DL à l'ordre n en a.
Il s'agit du développement de Taylor-Young :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x-a).$$

⚠ La réciproque est fausse !

⚠ La réciproque est fausse pour $n \geqslant 2$!

Contre-exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. La fonction f admet un DL à l'ordre 2 en $a = 0$:

2. La fonction f n'est pas deux fois dérivable en $a = 0$:

Theorem

Le développement limité de f à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a, lorsqu'il existe, est unique.

Theorem (opérations sur les DLs)

Soient f et g deux fonctions admettant un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a. On note $P_n(x-a)$ et $Q_n(x-a)$ leur partie régulières respectives.

1. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors (λf) admet un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a de partie régulière $\lambda P_n(x-a)$.*
2. *La somme $(f+g)$ admet un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a de partie régulière $P_n(x-a) + Q_n(x-a)$.*
3. *Le produit (fg) admet un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a de partie régulière $P_n(x-a) \times Q_n(x-a)$ tronquée à la puissance n.*

Exemples : Soit $f(x) = x\cos x$ et $g(x) = 1 - 3\sin x$. Déterminer les DLs d'ordre 3 en 0 de $(f+g)$ et (fg).

- $f(x) =$
- $g(x) =$
- $f(x) + g(x) =$

⚠ Le degré de la partie régulière de $(f+g) \leqslant n = 3$

- $(f(x)g(x) =$

⚠ On tronque la partie régulière de (fg) à l'ordre $n = 3$

Division selon les puissances croissantes d'un polynôme A par un polynôme B

Definition (valuation)

La **valuation** d'un polynôme rangé selon les puissances croissantes est le degré du premier terme non nul. (c'est-à-dire la plus petite puissance parmi les monômes de P_n).

On suppose que $B(0) \neq 0$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (Q_n, R_n),\ 2 \text{ polynômes tels que} \quad A = BQ_n + R_n \quad \text{où} \begin{cases} \deg Q_n \leqslant n \\ \operatorname{val} R_n \geqslant n+1 \end{cases}$$

Exemple de calcul. Soit $A(x) = 3 + 2x - 6x^2$ et $B(x) = 1 - x^2$.

$3 + 2x - 6x^2$	$\mathbf{1} - x^2$

On a

Division selon les puissances croissantes d'un polynôme A par un polynôme B

Definition (valuation)

La **valuation** d'un polynôme rangé selon les puissances croissantes est le degré du premier terme non nul. (c'est-à-dire la plus petite puissance parmi les monômes de P_n).

On suppose que $B(0) \neq 0$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (Q_n, R_n),\ 2 \text{ polynômes tels que} \quad A = BQ_n + R_n \quad \text{où} \begin{cases} \deg Q_n \leqslant n \\ \operatorname{val} R_n \geqslant n+1 \end{cases}$$

Exemple de calcul. Soit $A(x) = 3 + 2x - 6x^2$ et $B(x) = 1 - x^2$.

$3 + 2x - 6x^2$	$1 - x^2$
$-3(1 - x^2)$	$\underbrace{3}_{Q_0}$
$R_0 = 2x - 3x^2$	

On a $A = Q_0 B + R_0$

Division selon les puissances croissantes d'un polynôme A par un polynôme B

Definition (valuation)

La **valuation** d'un polynôme rangé selon les puissances croissantes est le degré du premier terme non nul. (c'est-à-dire la plus petite puissance parmi les monômes de P_n).

On suppose que $B(0) \neq 0$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (Q_n, R_n),\ 2 \text{ polynômes tels que} \quad A = BQ_n + R_n \quad \text{où} \begin{cases} \deg Q_n \leqslant n \\ \operatorname{val} R_n \geqslant n+1 \end{cases}$$

Exemple de calcul. Soit $A(x) = 3 + 2x - 6x^2$ et $B(x) = 1 - x^2$.

$$\begin{array}{c|c}
3 + 2x - 6x^2 & \mathbf{1} - x^2 \\
\hline
-3(1 - x^2) & \\
R_0 = 2x - 3x^2 & \underbrace{\underbrace{3}_{Q_0} + 2x}_{Q_1} \\
\hline
-2x(1 - x^2) & \\
R_1 = -3x^2 + 2x^3 & \\
\hline
\end{array}$$

On a $A = Q_0 B + R_0 = Q_1 B + R_1$

Division selon les puissances croissantes d'un polynôme A par un polynôme B

Definition (valuation)

La **valuation** d'un polynôme rangé selon les puissances croissantes est le degré du premier terme non nul. (c'est-à-dire la plus petite puissance parmi les monômes de P_n).

On suppose que $B(0) \neq 0$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (Q_n, R_n),\ 2 \text{ polynômes tels que} \quad A = BQ_n + R_n \quad \text{où} \begin{cases} \deg Q_n \leqslant n \\ \operatorname{val} R_n \geqslant n+1 \end{cases}$$

Exemple de calcul. Soit $A(x) = 3 + 2x - 6x^2$ et $B(x) = 1 - x^2$.

$$\begin{array}{c|c}
3 + 2x - 6x^2 & \mathbf{1} - x^2 \\
\hline
-3(1 - x^2) & \\
R_0 = 2x - 3x^2 & \underbrace{\underbrace{\underbrace{3}_{Q_0} + 2x}_{Q_1} - 3x^2}_{Q_2} \\
\hline
-2x(1 - x^2) & \\
R_1 = -3x^2 + 2x^3 & \\
\hline
-(-3x^2)(1 - x^2) & \\
R_2 = 2x^3 - 3x^4 &
\end{array}$$

On a $A = Q_0 B + R_0 = Q_1 B + R_1 = Q_2 B + R_2 = \cdots$

Theorem (quotient de DLs)

Soient f et g deux fonctions admettant un DL d'ordre n en a, càd

$$f(x) = A_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_1(x-a) \ \text{ et } \ g(x) = B_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_2(x-a) \text{ avec } \varepsilon_i(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On suppose que $B_n(0) \neq 0$. Soit (Q_n, R_n) le résultat de la division selon les puissances croissantes de A_n par B_n. Alors le quotient $\frac{f}{g}$ admet un DL d'ordre n en a dont la partie régulière est $Q_n(x-a)$.

⚠ On effectue la division de $A_n(h)$ par $B_n(h)$ pour la variable $h = x - a$.

Exemple. Déterminer le DL à l'ordre 2 en $a = 0$ de $\frac{e^x}{1+\cos x}$.

$$\vdots$$