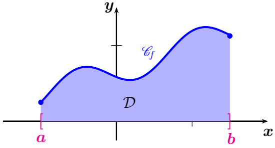
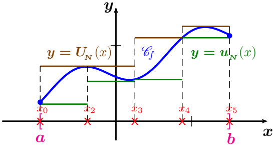
I Définition de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{D}$ Interprétation géométrique

Theorem

Si f est intégrable et positive sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = Aire(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est la partie délimitée par $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.





preuve :

II Propriétés des intégrales.

Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $\forall\, x \in [a, b],\ f(x) \geqslant 0$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in [a, b],\ f(x) = 0.$

preuve : On pose pour $x \in [a, b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ et on montrer que F est constante.

Definition (valeur moyenne de f)

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, $a<b$.

La nombre $\boxed{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt}$ est appelé **moyenne de f sur $[a,b]$**.

Theorem (1er théorème de la moyenne)

Si f est continue sur $[a,b]$, $a<b$, alors $\exists\, c \in]a,b[$, $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = f(c)$

preuve : On pose pour $x \in [a,b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ et on applique le T.A.F.

Theorem (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $\boxed{a \leqslant b}$ *et* f *et* g *deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$ *alors*

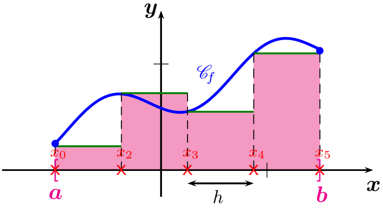
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt\right)\left(\int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt\right)$$

preuve : *Dans le cas* f *continue.*

III Intégration numérique

Intérêt : les applications réelles du calcul intégral font intervenir des intégrants dont on ne connait pas l'expression algébrique des primitives. On cherche alors une valeur approchée de ces intégrales obtenues par sommation d'aires signées.

Méthode des rectangles



Aire d'un rectangle : *base* $\times$ *hauteur*

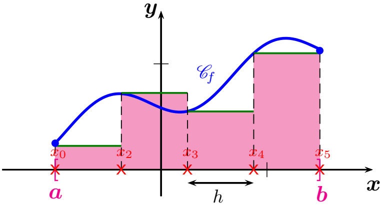
$$Aire(\blacksquare) = \sum_{i=0}^{N-1} h \times f(x_i)$$

erreur commise : $\left| \int_a^b f(t)\, dt - Aire(\blacksquare) \right| \leqslant C_1 \times h$

III Intégration numérique

Intérêt : les applications réelles du calcul intégral font intervenir des intégrants dont on ne connait pas l'expression algébrique des primitives. On cherche alors une valeur approchée de ces intégrales obtenues par sommation d'aires signées.

Méthode des rectangles

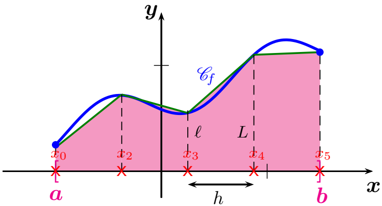


Aire d'un rectangle : *base* $\times$ *hauteur*

$$Aire(\blacksquare) = \sum_{i=0}^{N-1} h \times f(x_i)$$

erreur commise : $\left| \int_a^b f(t)\,dt - Aire(\blacksquare) \right| \leqslant C_1 \times h$

Méthode des trapèzes



Aire d'un trapèze : $\frac{h \times (\ell + L)}{2}$

$$Aire(\blacksquare) = \sum_{i=0}^{N-1} h \times \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

erreur commise : $\left| \int_a^b f(t)\,dt - Aire(\blacksquare) \right| \leqslant C_2 \times h^2$

voir exercice A.2.13 pour une étude comparative

Theorem (convergence linéaire de la méthode des rectangles)

Soit I un intervalle, $a, b \in I$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On note $K := \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Alors, en considérant une subdivision régulière $\{x_0; x_1; \dots; x_N\}$, on a

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{i=0}^{N-1} h \times f(x_i) \right| \leqslant \frac{b-a}{2} K \times h.$$

preuve : On a $h \times f(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\,dt$ et $\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt$ (relation de Chasles).

Par conséquent,

$$\int_a^b f(t)\,dt - \sum_{i=0}^{N-1} h \times f(x_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(t) - f(x_i)\right] dt$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{i=0}^{N-1} h \times f(x_i) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|f(t) - f(x_i)\right|\,dt$$ **lire proposition 7.1.4**

D'après le T.A.F, $\exists\, c_i \in]x_i, t[\subset]x_i, x_{i+1}[,\ f(t) - f(x_i) = f'(c_i)(t - x_i) \quad \Rightarrow |f(t) - f(x_i)| \leqslant K(t - x_i)$.

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{i=0}^{N-1} h \times f(x_i) \right| \leqslant K \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (t - x_i)\,dt = K \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{(t - x_i)^2}{2}\right]_{x_i}^{x_i+1}$$

$$= K \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} = K \times N \frac{h^2}{2} = K \frac{b-a}{2} h.$$