# *IV* Dérivation des fonctions réciproques

**Theorem (dérivée de $f^{-1}$)**

*Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert $\Omega$. On suppose $\forall\, a \in \Omega,\ f'(a) > 0$. Alors $f$ est bijective de $\Omega$ sur $f(\Omega)$. De plus, son application réciproque $f^{-1}$ est définie et dérivable de $f(\Omega)$ vers $\Omega$ et*

$$\forall b \in f(\Omega),\ \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} > 0\ .$$

**preuve de la formule** : Soit $b \in f(\Omega)$ et $y \in f(\Omega)$. On veut montrer que $\lim\limits_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$ existe.

**Remarque** :

1. Le théorème est bien-entendu valable en considérant l'hypothèse $\forall\, a \in \Omega,\ f'(a) < 0$.
2. les fonctions dérivées $f'$ et $\left(f^{-1}\right)'$ sont de même signe donc $f$ et $f^{-1}$ ont la même monotonie.

**Autre version du théorème de bijection lorsque le domaine de définition est un fermé borné :**

**Theorem (dérivée de $f^{-1}$)**

*Soit $f$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose $\forall\, x \in\, ]a,b[,\ f'(x) > 0$. Alors $f$ est bijective de $[a,b]$ sur $f([a,b])$.*
*De plus, son application réciproque $f^{-1}$ est définie et continue de $f([a,b])$ vers $[a,b]$ et dérivable sur $f(]a,b[)$*

$$\forall y \in f(]a,b[),\ \ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} > 0\ .$$

# Fonction sinus et arc sinus

**Exemple 1** : Soit $f$ définie par $\boxed{f(x) = \sin x \text{ sur } [a,b] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$.

1. On a $\forall x \in ]a,b[ = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = \cos x > 0$. Donc $f$ est strictement croissante et bijective de $[a,b] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $f([a,b]) = f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [f(-\frac{\pi}{2}), f(\frac{\pi}{2})] = [-1,1]$.
2. La fonction $f$ est continue. D'après le chapitre 4, elle admet donc une application réciproque, appelée Arcsin, définie et continue sur $[-1,1]$ et à valeur dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
3. D'après le th. de bijection du chapitre 5, on peut en déduire que Arcsin est dérivable sur $f(]a,b[) = ]-1, 1[$ et

$$\boxed{\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

**Voir la courbe représentative au paragraphe 5.3.2**

# Fonction cosinus et arc cosinus

**Exemple 2** : Soit $f$ définie par $\boxed{f(x) = \cos x \text{ sur } [a, b] = [0, \pi]}$.

1. On a $\forall\, x \in ]a, b[ = ]0, \pi[$, $f'(x) = -\sin x < 0$. Donc $f$ est strictement décroissante et bijective de $[a, b] = [0, \pi]$ vers $f([a, b]) = f([0, \pi]) = [f(\pi), f(0)] = [-1, 1]$.
2. La fonction $f$ est continue. D'après le chapitre 4, elle admet donc une application réciproque, appelée Arccos, définie et continue sur $[-1, 1]$ et à valeur dans $[0, \pi]$.
3. D'après le th. de bijection du chapitre 5, on peut en déduire que Arccos est dérivable sur $f(]a, b[) = ]-1, 1[$ et

$$\boxed{\mathrm{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

**Voir la courbe représentative au paragraphe 5.3.2**

# Fonction tangente et arc tangente

**Exemple 3** : Soit $f$ définie par $\boxed{f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ sur } ]a,b[ = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$.

1. On a $\forall\, x \in ]a,b[ = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$. Donc $f$ est strictement croissante et bijective de $]a,b[ = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $f(]a,b[) = f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$. *(à détailler)*
2. La fonction $f$ est continue. D'après le chapitre 4, elle admet donc une application réciproque, appelée Arctan, définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. D'après le th. de bijection du chapitre 5, on peut en déduire que Arctan est dérivable sur $f(]a,b[) = \mathbb{R}$ et

$$\boxed{\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

**Voir la courbe représentative au paragraphe 5.3.2**