Theorem (composition de DLs)

Soit f admettant un DL d'ordre n en a et g admettant un DL d'ordre n en $b = f(a)$, càd

$$f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_1(x-a) \ \text{ et } \ g(y) = Q_n(y-b) + (y-b)^n \varepsilon_2(y-b) \text{ avec } \varepsilon_i(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Alors, $g \circ f$ admet un DL d'ordre n en a de partie régulière $Q_n \circ (P_n - b)$ tronquée à la puissance n.

Exemple : Soit $f(x) = 1 + e^x$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Déterminer le DL à l'ordre 2 en $a = 0$ de $g \circ f$.

- DL en $a = 0$ de f : $f(x) = f(0+h) = \underbrace{\qquad}_{P_2(h)} + h^2 \varepsilon(h)$
- DL en $b = f(0) = 2$ de g : $g(y) = g(2+k) = \cdots$
- On effectue le changement de variable $k = P_2(h) - b =$

V Applications des développements limités

A Etude locale de courbe

$\longrightarrow$ on peut utiliser un DL de f en a pour déterminer la position relative de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au voisinage de a.

1. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, $a \in I$ et admet un DL d'ordre 2 en a

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + (x-a)^2\varepsilon(x-a), \qquad \varepsilon(x-a) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0,$$

avec $\alpha_2 \neq 0$, alors l'équation de la tangente est $\boxed{y = \alpha_0 + \alpha_1(x-a)}$ et, en posant

$$d(x) = f(x) - [\alpha_0 + \alpha_1(x-a)] = \alpha_2(x-a)^2 + \underbrace{(x-a)^2\varepsilon(x-a)}_{\text{négligeable}}$$

   (a) $\alpha_2 > 0 \Rightarrow d(x) > 0 \Rightarrow \mathscr{C}_f$ de f est située au dessus de la tangente
   (b) $\alpha_2 < 0 \Rightarrow d(x) < 0 \Rightarrow \mathscr{C}_f$ de f est située sous la tangente.

2. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, $a \in I$ et admet un DL d'ordre 3 en a

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_3(x-a)^3 + (x-a)^3\varepsilon(x-a), \qquad \varepsilon(x-a) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0,$$

avec $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 > 0$, alors l'équation de la tangente est $y = \alpha_0 + \alpha_1(x-a)$. La tangente traverse la courbe au point $(a, f(a))$ et on a $d(x) = \alpha_3(x-a)^3 + (x-a)^3\varepsilon(x-a)$

   (a) $x < a \Rightarrow d(x) < 0 \Rightarrow \mathscr{C}_f$ est située sous la tangente.
   (b) $x > a \Rightarrow d(x) > 0 \Rightarrow \mathscr{C}_f$ est située au dessus de la tangente.

Exercice : Soit f la fonction définie par $f(x) = \text{Arctan}\, x$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 0$, puis la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.

méthodologie : il faut obtenir un DL de f à un ordre suffisant n pour avoir accès aux informations suivantes :

$$f(x) = [\text{ DL d'ordre } 1] + [\text{ 1 terme supplémentaire}] + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x-a)}_{\text{négligeable}}$$

correction :