IV Calcul Intégral

A Intégration par parties (I.P.P.)

Theorem

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et $a, b \in I$.

Alors, $$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt \quad \textit{(pour les intégrales),}$$

ou bien $$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx \quad \textit{(pour les primitives).}$$

preuve : on utilise la formule de dérivation d'un produit.

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow u'v = (uv)' - uv'$$

$$\begin{aligned}\int_a^b u'(t)v(t)\,dt &= \int_a^b (uv)'(t)\,dt - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt \\ &= \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Quelques règles d'utilisation :

1. Pour calculer $\displaystyle\int f(x)\,dx$ où $f(x) = \begin{cases} \ln x \\ \operatorname{Arcsin} x, \ \operatorname{Arccos} x, \ \operatorname{Arctan} x \\ \operatorname{Argsh} x, \ \operatorname{Argch} x, \ \operatorname{Argth} x \ \ (\text{à venir}) \end{cases}$

   on effectue **une seule I.P.P** en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = f(x)$.

2. Pour calculer $\displaystyle\int P(x)e^{ax+b}\,dx$, où P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$:

   on effectue ***n* I.P.P successives** avec $u'(x) = e^{ax+b}$ et $v(x) =$*le polynôme*

(→ Idem avec $\displaystyle\int P(x)\sin(ax+b)\,dx$ ou $\displaystyle\int P(x)\cos(ax+b)\,dx$.).

3. Pour calculer $G(x) := \displaystyle\int \sin(nx)e^{ax+b}\,dx$:

   On effectue **2 I.P.P. successives** avec le choix $u'(x) = e^{ax+b}$ et $v(x) = \sin(nx)$ ou $\cos(nx)$, puis on résout une équation d'inconnue $G(x)$.

(→ Idem avec $G(x) := \displaystyle\int \cos(nx)e^{ax+b}\,dx$.)

Exercice A.2.15 : Calculs de I_1 et I_4

$\boxed{B}$ Changement de variable

$\rightarrow$ on utilise la formule de dérivation de fonctions composées : $(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \times \varphi'(x)$.

Theorem

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$. On suppose que φ est une application bijective de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $[a, b] \subset \operatorname{Im} \varphi \subset I$. Alors,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x)) \times \varphi'(x)\,dx.$$

preuve : Soit F une primitive de f. D'un côté, on sait que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

De l'autre côté, on a $F'(x) = f(x)$ et

$$\begin{aligned}\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x)) \times \varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} [F \circ \varphi]'(x)\,dx &= \Big[F \circ \varphi\Big]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \\ &= F \circ \varphi(\varphi^{-1}(b)) - F \circ \varphi(\varphi^{-1}(a)) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Exercice : Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt$.

1. On pose le changement de variable $t = \varphi(x) = \sin x$.
   La fonction $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ est bijective.
2. On change les bornes, càd on détermine $x = \varphi^{-1}(-\frac{1}{2})$ et $x = \varphi^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$.
   Plus précisément, on résout
   $$t = -\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{2} = \sin x \text{ et } x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad\Leftrightarrow\quad x = -\frac{\pi}{6}$$
   $$t = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin x \text{ et } x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{\pi}{3}$$
3. On exprime dt en fonction de dx : $\frac{dt}{dx} = \frac{d[\sin x]}{dx} = \cos x \Rightarrow dt = \cos x\, dx$.
4. On exprime l'intégrant $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ en fonction de x :
   $$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = \cos x \quad \text{car } x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$
5. On calcule l'intégrale de la variable x : $\sqrt{1-t^2}\,dt = \cos x \times \cos x\, dx$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \left(-\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Exercice : Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{4t^2 + 6t + 3}\, dt$.

Exercice : Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{t+2}{4t^2 + 6t + 3}\, dt$.